

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Analyse et contrôle LQ-optimal de systèmes hamiltoniens à ports

LAMOLINE, François

Award date:
2015

Awarding institution:
Université de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



Analyse et contrôle LQ-optimal de systèmes hamiltoniens à ports

Promoteur : J. Winkin

Mémoire présenté pour l'obtention du
grade de master en Sciences Mathématiques

François Lamoline
Juin 2015

It always seems impossible until it is done.

Nelson Mandela

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire et qui m'ont aidé lors de la rédaction. Je voudrais particulièrement remercier les personnes suivantes pour leur aide formidable.

Je tiens à remercier vivement Mr Joseph Winkin pour son implication personnelle et ses précieux conseils. Merci encore pour votre soutien lorsque ce projet de mémoire n'était encore qu'une idée.

Un grand merci à Jérémy Dehaye pour tous ces moments de dissipation passés à son bureau.

Je remercie également ma famille pour leur soutien, leurs nombreuses relectures et, la bienveillance dont ils font preuves à mon égard.

Enfin, j'adresse mes remerciements à mes amis mathématiciens, masters 2, de l'Université de Namur que j'ai appris à connaître au cours de ces dernières années et, qui m'ont toujours aidé et soutenu durant tout ce temps.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux systèmes hamiltoniens à ports en dimension infinie. Cette approche hamiltonienne à ports nous permet de considérer une large gamme de problèmes impliquant du contrôle aux frontières du domaine spatial. L'intérêt premier de cette formulation hamiltonienne à ports est la structure du modèle mathématique obtenu. Celle-ci nous permet de développer une analyse plus appropriée que l'approche semi-groupe qui peut, certes, être employée pour tout système dynamique de dimension infinie mais s'avère dans certains cas difficile à mettre en oeuvre.

Les systèmes hamiltoniens à ports sont des systèmes dynamiques sur lesquelles les entrées agissent aux frontières du domaine spatial. Les sorties sont également mesurées au niveau des frontières. Nous montrerons qu'il est possible de caractériser les entrées et sorties par des matrices. Ces matrices seront utilisées pour étudier des propriétés pour cette classe de systèmes comme l'existence et l'unicité d'une solution, la stabilité et, pour en déterminer l'équation d'équilibre. Nous montrerons également que la classe des systèmes hamiltoniens à ports est une sous-classe des systèmes spectraux de Riesz. Enfin, nous étudierons la commande linéaire quadratique d'un système hamiltonien à ports. Tout au long de ce mémoire, nous appliquons la théorie présentée à l'exemple d'une corde vibrante.

Mots clés : Système dimension infinie - C_0 semi-groupe - Système hamiltonien à port - Contrôle frontière - Commande LQ-optimal

Abstract

In this master thesis, we focus on infinite-dimensional port-Hamiltonian systems. This Hamiltonian approach allows us to consider a large range of problems involving boundary control. The initial interest is the mathematical framework of the model obtained. This allows us to develop a more appropriate analysis than the semigroup approach.

Port-Hamiltonian systems are dynamical systems for which the inputs act on boundaries. The output are also read on boundaries. We will show that there is a way to describe the inputs and the outputs with matrices. These matrices will be used to study the properties of this class of systems such as the existence and unicity of a solution, the stability and, to determine the balance equation. We will also show that the class of port-Hamiltonian systems is a sub-class of Riesz spectral systems. Eventually, we will study the LQ-optimal control of port-Hamiltonian systems. All along this master thesis, we apply the theory to the example of a vibrating string.

Keywords : Infinite-dimensional system - C_0 -semigroup - Port-Hamiltonian system - Boundary control - LQ-optimal control

Table des matières

Notations	vi
1 Introduction	1
1.1 Comment contrôler un système	1
1.2 Enjeux	2
1.3 Description des thèmes abordés	3
2 Système hamiltonien à ports	5
3 Semi-groupes et théorèmes de génération	11
3.1 Semi-groupes fortement continus	11
3.2 Semi-groupes uniformément continus	13
3.3 Semi-groupe et opérateur résolvant	14
3.4 Théorème de Hille et Yosida	19
3.5 Théorème de Lümer et Phillips	23
4 Problème bien posé	28
4.1 Equation différentielle ordinaire	28
4.2 Théorème de génération	30
4.3 Exemple	31
5 Stabilité d'un système hamiltonien à ports	33
5.1 Spectre	34
5.2 Critères de stabilité exponentielle	35
5.3 Exemple	37
5.4 Contrôle par boucle de rétroaction dynamique	41
6 Système hamiltonien à ports contrôlé aux frontières	43
6.1 Solutions classique et douce	44
6.2 Reformulation du système hamiltonien à ports	46
6.3 Sorties	48
6.4 Exemple	49
7 Commande Optimale Linéaire-Quadratique	51
7.1 Conception d'asservissement d'état par optimisation	51
7.2 Construction du modèle étendu	53
7.3 Equation de Riccati	55
7.4 Propriétés de l'opérateur de Riccati	56
7.5 Opérateur hamiltonien	58
7.6 Méthode	61
7.7 Exemple	61
8 Conclusions et perspectives	66
8.1 Perspectives	67
A Théorie de l'intégration	68

B	Système spectral et base de Riesz	72
C	Calcul de l'opérateur adjoint de A	74
C.1	Calcul du domaine $D(A^*)$	75
D	Calcul de l'opérateur adjoint de B	77
E	Calcul de l'exponentielle matricielle	78

Notations

EDP	équation aux dérivées partielles
\bar{A}	fermeture de l'opérateur A
\star	$h \star g$ est le produit de convolution entre les fonctions h et g
\oplus	$Z_1 \oplus Z_2$, la somme directe entre les espaces vectoriels Z_1 et Z_2
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\langle u, v \rangle$, le produit scalaire entre les vecteurs u et v
\perp	V^\perp , le complément orthogonal de l'espace vectoriel V
$*$	A^* , l'opérateur adjoint de A
e	A^e , l'opérateur étendu de A
$R(\lambda, A)$	l'opérateur résolvant de A évalué en λ
$\rho(A)$	ensemble résolvant de l'opérateur A
$\sigma(A)$	ensemble spectral de l'opérateur A
$\sigma_p(A)$	ensemble des valeurs propres de l'opérateur A
$\sigma_c(A)$	ensemble spectral continu de l'opérateur A
$\sigma_r(A)$	ensemble spectral résiduel de l'opérateur A
$\Sigma(A, B, C, D)$	système linéaire dynamique
$\Sigma(A, B, C)$	système linéaire dynamique avec l'opérateur $D = 0$
$\Sigma(A, B)$	système linéaire dynamique avec l'opérateur C non-défini et avec l'opérateur $D = 0$
\mathbb{K}	ensemble des scalaires
\mathbb{R}	ensemble des réels
\mathbb{R}^+	ensemble des réels positifs
$\mathbb{R}^-, \mathbb{R}_0^-$	ensemble des réels négatifs, ensemble des réels négatifs différents de 0
\mathbb{C}	ensemble des complexes
\mathbb{C}^+	ensemble des complexes positifs
$\mathbb{C}^-, \mathbb{C}_0^-$	ensemble des complexes négatifs, ensemble des complexes négatifs différents de 0
$\mathcal{L}(X)$	l'espace vectoriel des opérateurs linéaires partant de X et allant dans X qui sont continus
$L^2([a, b]; \mathbb{K}^{n \times n})$	espace des fonctions de carré intégrable définies sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}^{n \times n}$
$L^\infty([a, b]; \mathbb{K}^{n \times n})$	espace de fonctions mesurables et essentiellement bornées définies sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}^{n \times n}$

Chapitre 1

Introduction

De plus en plus, les systèmes automatisés, contrôlés envahissent notre quotidien dans le but d'améliorer notre qualité de vie et de nous assister dans la réalisation de certaines tâches. Il faut remonter jusqu'au III^e siècle avant J-C pour un premier exemple de système contrôlé avec, notamment, l'horloge à eau. Plus récemment, nous pouvons citer comme exemples : le système de freinage ABS, l'assistance à la conduite, le régulateur de vitesse, les systèmes médicaux automatisés, le guidage aérospatial, etc... . Les domaines d'application sont variés.

A partir des lois de la physique, nous pouvons exprimer des phénomènes sous la forme de systèmes dynamiques régis par des équations aux dérivées partielles (EDP). Des contrôles peuvent alors être appliqués à ces systèmes. Pour aider le lecteur à mieux comprendre les notions de contrôle et de système contrôlé, une explication lapidaire est présentée pour répondre à la question : « Comment contrôler un système ? ».

1.1 Comment contrôler un système

Nous pouvons décrire tout système dynamique qui est en contact permanent avec son environnement de la manière schématisée représentée à la figure 1.1, où la fonction u représente l'entrée qui influence le système et la fonction y la sortie qui est observée.

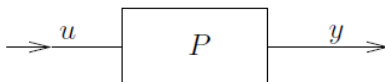


FIGURE 1.1 – Système avec entrée et sortie

Le système P représente le système dynamique étudié interagissant avec son environnement. On parle de système en boucle ouverte. Ce système dynamique peut être décrit par l'équation de dynamique (1.1) et l'équation de sortie (1.2) :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \in D(A) \quad (1.1)$$

$$y(t) = Cx(t), t \geq 0, \quad (1.2)$$

où A , B , C et D sont des opérateurs linéaires. De plus, les fonctions x , y et u sont respectivement à valeurs dans l'espace d'état X , l'espace de sortie Y et l'espace d'entrée U . Les espaces X , Y et U seront définis ultérieurement. De manière générale, nous cherchons à appliquer un contrôle au système dynamique P . Dès lors, il nous faut trouver une entrée u telle que la sortie y ait le comportement voulu. L'exemple typique est la stabilisation qui consiste à concevoir une entrée $u(t)$ telle que $y(t)$ converge vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Dans la plupart des cas, la conception de

l'entrée u prend en compte la sortie y ce qui consiste en un système de feedback de sortie comme représenté à la figure 1.2. Notons qu'un travail de conception doit être effectué pour que le contrôle appliqué soit physiquement réalisable. On parle de système en boucle fermée.

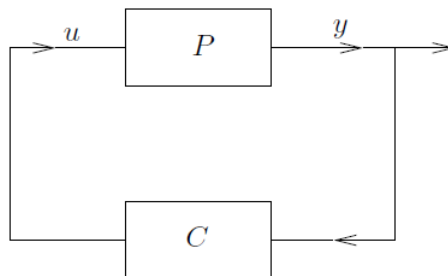


FIGURE 1.2 – Système de feedback de sortie

Nous terminons cette section en donnant quelques lignes directrices pour aider à la lecture des schémas aux figures 1.1 et 1.2. La boîte rectangulaire peut être considérée comme « une boîte noire » qui permet d'obtenir la sortie à partir d'une entrée. Des exemples de modèles mathématiques permettant de décrire cette transformation sont les équations différentielles ordinaires et les EDP. Les systèmes dynamiques P et C sont respectivement le système contrôlé et le système contrôleur.

Comme déjà mentionné, l'objectif lorsque l'on cherche à contrôler un système dynamique est la conception d'un système contrôleur C . Un des enjeux de ce mémoire sera donc la conception et la mise en place d'un tel type de système contrôleur pour le cas des systèmes hamiltoniens à ports.

1.2 Enjeux

Depuis ces dernières années, le contrôle d'équations aux dérivées partielles est devenu un sujet d'étude en plein développement. Les différents travaux dans ce domaine ont commencé par aborder le contrôle en dimension finie pour ensuite effectuer une généralisation en dimension infinie, pour finalement, parvenir à la théorie que nous connaissons aujourd'hui.

La liste non-exhaustive suivante permet de donner une idée au lecteur de différents sujets de recherches qui ont été abordés récemment dans la théorie du contrôle.

1. Les systèmes à paramètres distribués.
2. La dynamique de systèmes dissipatifs en dimension infinie.
3. Le contrôle optimal et l'équation de Riccati.

Les systèmes dynamiques de dimension infinie peuvent être utilisés pour décrire de nombreux phénomènes comme la diffusion de la chaleur, la propagation d'onde, la dynamique des fluides, les procédés chimiques, etc... La variable étudiée de ces systèmes est nommée la variable d'état ou trajectoire d'état. Les variables les plus rencontrées sont la position, la température, la concentration, etc... L'espace dans lequel la trajectoire d'état évolue est qualifiée d'espace d'état. Ce que nous entendons par système en dimension infinie est un système dynamique pour lequel l'espace d'état est de dimension infinie.

La problématique considérée dans ce mémoire est une généralisation de la théorie du contrôle sur un espace d'état de dimension infinie en considérant le cas particulier des systèmes hamiltoniens à ports. Lors de l'étude de systèmes dynamiques, certaines questions viennent régulièrement : la notion de problème bien posé, la stabilité, la contrôlabilité, l'observabilité, la conception de commande linéaire quadratique. Dans ce mémoire, nous allons nous focaliser sur la notion de problème bien posé, de stabilité et sur la conception de commande linéaire quadratique. En effet, l'objectif est de fournir une méthode de modélisation, des résultats pour prouver qu'un problème est bien

posé, des outils pour l'analyse de la stabilité ainsi que pour la conception d'une commande linéaire quadratique optimale pour des systèmes à paramètres distribués en ayant recours à la formulation hamiltonienne à ports. L'intérêt étant que nous présentons une approche qui n'est pas uniquement basée sur la théorie des semi-groupes. En effet, l'approche présentée a l'avantage d'exploiter la structure de la classe hamiltonienne à ports. Cela nous permet de fournir des techniques et outils qui peuvent s'avérer être, dans certains cas, plus évidents à vérifier et spécifiques à cette classe de systèmes.

La motivation d'une approche hamiltonienne à ports est de présenter une théorie regroupant de nombreux systèmes à paramètres distribués. Pour des exemples de systèmes à paramètres distribués pouvant s'exprimer sous la forme hamiltonienne à ports, nous invitons le lecteur à se référer à [14, p.1-8].

1.3 Description des thèmes abordés

Ce mémoire est divisé en plusieurs chapitres. Le contenu de chacun d'entre eux est brièvement résumé ci-dessous.

Chapitre 2. Nous définissons le concept de système hamiltonien à ports en donnant notamment, plusieurs exemples pour aider le lecteur à se familiariser avec cette classe de systèmes. Nous énonçons et démontrons également l'équation de variation d'énergie associée à cette classe.

Chapitre 3. Ce chapitre a pour but premier de familiariser le lecteur aux éléments théoriques et concepts essentiels à la modélisation mathématique du problème. Dans ce chapitre, nous définissons les notions de semi-groupe fortement continu et uniformément continu. De plus, nous présentons les liens existants entre le semi-groupe, le générateur et l'opérateur résolvant. Nous terminons ce chapitre en énonçant et démontrant les théorèmes de génération de Hille-Yosida et de Lümer-Philippis.

Chapitre 4. Nous introduisons la notion de problème bien posé et démontrons que tout système hamiltonien à ports est bien posé sous certaines conditions. Nous explicitons la formulation d'un système hamiltonien à ports sous la forme $\dot{x}(t) = Ax(t)$, où A est un opérateur fermé.

Chapitre 5. Dans ce chapitre, nous étudions la stabilité d'un système hamiltonien à ports. Dans un premier temps, nous présentons la distinction entre borne spectrale et borne de croissance qui doit être faite en dimension infinie. Ces deux notions coïncident en dimension finie. Cela n'est, toutefois, plus nécessairement le cas en dimension infinie. Pour pouvoir affirmer que l'égalité est vérifiée dans le cas hamiltonien à ports, nous démontrons que tout système hamiltonien à ports est un système spectral de Riesz. Dans un second temps, nous énonçons et démontrons des critères facilitant la vérification de la stabilité exponentielle pour un système hamiltonien à ports.

Chapitre 6. Ce chapitre traite de l'ajout d'une entrée et d'une sortie au système hamiltonien à ports défini lors du chapitre 2. Tout d'abord, nous explicitons la reformulation d'un système hamiltonien à ports sous la forme d'un système dynamique contrôlé aux frontières. Après quoi, nous explicitons l'équation de variation d'énergie avec entrées et sorties, et nous abordons également la question d'un problème bien posé au travers des notions de solution classique et douce.

Chapitre 7. Dans ce chapitre, nous abordons la conception d'une commande linéaire quadratique optimale pour un système hamiltonien à ports. Nous donnons l'expression de l'équation de Riccati pour un système hamiltonien à ports et des propriétés vérifiées par l'opérateur solution.

Chapitre 8. Ce chapitre contient les conclusions formulées à la suite de ce mémoire. Pour terminer, nous donnons quelques recommandations et idées pour poursuivre ce travail.

Tout au long de ce mémoire, nous considérons l'exemple d'une corde vibrante. Nous utilisons cet exemple pour présenter et appliquer la théorie et les résultats présentés dans chaque chapitre. Finalement, en annexes, nous effectuons quelques rappels tout d'abord sur la théorie de l'intégration sur des espaces fonctionnels ainsi que sur les notions de système spectral et de base de Riesz. Ensuite, nous détaillons le calcul des opérateurs adjoints présents dans l'équation de Riccati.

L'analyse fonctionnelle joue un rôle important dans l'étude de systèmes dynamiques en dimension infinie. Une connaissance de celle-ci est donc primordiale. Un rappel ne sera pas effectué. Le lecteur le souhaitant pourra se référer à [3]. Notons également que tous les opérateurs considérés dans ce travail sont supposés linéaires.

Chapitre 2

Système hamiltonien à ports

Dans ce chapitre, nous allons introduire et définir une classe de systèmes différentiels : les systèmes hamiltoniens à ports. Ce chapitre se base en majeure partie sur la théorie du livre [8] dont le chapitre 7 constitue une introduction à la notion de système hamiltonien à ports. Par ailleurs, le lecteur souhaitant plus d'exemples pourra s'y référer.

Avant de définir à proprement parler un système hamiltonien à ports, nous commencerons par considérer l'exemple d'une corde vibrante qui est un exemple classique de cette classe de systèmes. La corde est fixée d'un côté noté a tandis que l'autre extrémité b est laissée libre. Le schéma de l'exemple considéré est repris à la figure 2.1.



FIGURE 2.1 – Schéma d'une corde vibrante

Nous supposons qu'une force $u(t)$ peut être appliquée à l'extrémité libre. La dynamique d'une corde vibrante non-amortie est régie par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\zeta, t) = \frac{1}{\rho(\zeta)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(T(\zeta) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(\zeta, t) \right). \quad (2.1)$$

Explicitons les différentes variables :

- ζ : variable spatiale comprise dans l'intervalle $[a, b]$ (m) ;
- $w(\zeta, t)$: la position verticale de la corde au point ζ contenu dans l'intervalle $[a, b]$ et au temps $t \geq 0$. En d'autres termes, elle représente la dynamique de la corde (m) ;
- $T(\zeta)$ ¹ : le module de Young de la corde ($PA = kg/ms^2$) ;
- ρ : la densité de masse (kg/m^3).

1. Le module de Young permet de lier la contrainte de traction appliquée à un matériau et la déformation. La loi d'élasticité exprime cette relation :

$$\sigma = T\epsilon$$

où σ est la contrainte, T le module de Young et ϵ la déformation. Cette relation est valable lorsque la déformation est relativement faible et que la limite d'élasticité n'est pas atteinte.

Notons que si la densité de masse et le module de Young sont constants et, en posant $c = \frac{1}{\rho\zeta}T(\zeta)$, nous retrouvons une EDP classique

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\zeta, t) = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}(\zeta, t)$$

portant le nom d'équation d'onde non amortie.

Comme nous considérons une EDP, il nous faut également décrire les conditions frontières qui lui sont associées. Nous déterminons les conditions frontières à partir des hypothèses prises sur le système dynamique. D'une part, la corde est fixée en l'extrémité a ce qui signifie que la vitesse est nulle en a . D'autre part, nous supposons que nous contrôlons la force appliquée à l'extrémité b . Dès lors, nous obtenons les conditions frontières suivantes :

$$\frac{\partial w}{\partial t}(a, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$T(b) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(b, t) = u. \quad (2.3)$$

L'énergie d'un système dynamique est décrite par l'hamiltonien qui représente l'énergie totale du système. Ce système a pour hamiltonien

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_a^b \left\{ \rho(\zeta) \left(\frac{\partial w}{\partial t}(\zeta, t) \right)^2 + T(\zeta) \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}(\zeta, t) \right)^2 \right\} d\zeta. \quad (2.4)$$

Nous allons maintenant présenter une propriété que l'on retrouve dans ce système et de manière plus générale dans tout système hamiltonien à ports en exprimant la variation de l'énergie. Nous considérons que toutes les conditions de régularité sont respectées, notamment l'hypothèse d'avoir des fonctions de classe C^2 .

Dérivons l'expression de l'énergie le long de la solution de l'équation aux dérivées partielles (2.1). Nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= \int_a^b \rho(\zeta) \frac{\partial w}{\partial t}(\zeta, t) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\zeta, t) + T(\zeta) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(\zeta, t) \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial t}(\zeta, t) d\zeta \\ &= \int_a^b \frac{\partial w}{\partial t}(\zeta, t) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(T(\zeta) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(\zeta, t) \right) + T(\zeta) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(\zeta, t) \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial t}(\zeta, t) d\zeta. \end{aligned}$$

Appliquons la méthode d'intégration par parties. Posons

$$g' = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(T(\zeta) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(\zeta, t) \right) \text{ et } f = \frac{\partial w}{\partial t}(\zeta, t).$$

Nous obtenons ainsi

$$\frac{dE}{dt}(t) = - \int_a^b \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial t}(\zeta, t) \left(T(\zeta) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(\zeta, t) \right) d\zeta + \left[\frac{\partial w}{\partial t}(\zeta, t) T(\zeta) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(\zeta, t) \right]_a^b + \int_a^b T(\zeta) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(\zeta, t) \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial t}(\zeta, t) d\zeta,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{dE}{dt}(t) = \frac{\partial w}{\partial t}(b, t) T(b) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(b, t) - \frac{\partial w}{\partial t}(a, t) T(a) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(a, t). \quad (2.5)$$

Cette équation de variation de l'énergie nous permet d'affirmer que toute modification de l'énergie interne du système ne peut s'effectuer que par les extrémités en a et en b du domaine. C'est la raison pour laquelle on qualifie généralement un système hamiltonien à ports de système ouvert, c'est-à-dire, « *un système qui interagit en permanence avec son environnement* ». Dans notre cas, nous avons choisi de fixer l'extrémité de la corde en a ce qui implique que $\frac{\partial w}{\partial t}(a, t) = 0$. En

outre, nous avons également pris l'hypothèse que nous contrôlons la force appliquée en b . Dès lors, l'équation (2.5) s'écrit :

$$\frac{dE}{dt}(t) = \frac{\partial w}{\partial t}(b, t)u(t). \quad (2.6)$$

Nous allons maintenant réexprimer les équations (2.1) et (2.4) sous une forme plus adéquate, c'est-à-dire, une forme généralisant la définition de système hamiltonien à ports à la dimension infinie. Effectuons un changement de variable $x_1(\zeta, t) = \rho \frac{\partial w}{\partial t}(\zeta, t)$ et $x_2(\zeta, t) = \frac{\partial w}{\partial \zeta}(\zeta, t)$. Appliquons, tout d'abord, cette transformation à l'équation (2.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} x_1(\zeta, t) \\ x_2(\zeta, t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\rho(\zeta)} & 0 \\ 0 & T(\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(\zeta, t) \\ x_2(\zeta, t) \end{bmatrix} \right) \\ &= P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\mathcal{H}(\zeta) \begin{bmatrix} x_1(\zeta, t) \\ x_2(\zeta, t) \end{bmatrix} \right), \end{aligned}$$

où $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathcal{H}(\zeta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho(\zeta)} & 0 \\ 0 & T(\zeta) \end{bmatrix}$. Nous pouvons maintenant appliquer cette même transformation à l'équation (2.4) et ainsi obtenir

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{x_1(\zeta, t)^2}{\rho(\zeta)} + T(\zeta)x_2(\zeta, t)^2 d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \begin{bmatrix} x_1(\zeta, t) & x_2(\zeta, t) \end{bmatrix} \mathcal{H}(\zeta) \begin{bmatrix} x_1(\zeta, t) \\ x_2(\zeta, t) \end{bmatrix} d\zeta. \end{aligned}$$

Nous pouvons désormais définir de manière rigoureuse cette classe particulière de systèmes. Pour ce faire, notons $X := L^2([a, b]; \mathbb{K}^{n \times n})$ l'espace de Hilbert muni du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle_X = \frac{1}{2} \int_a^b g(\zeta)^* \mathcal{H}(\zeta) f(\zeta) d\zeta. \quad (2.7)$$

En prenant la matrice identité comme matrice \mathcal{H} , nous retrouvons le produit scalaire sur l'espace L^2 . Pour ne pas alourdir les notations, l'espace d'état sera noté $L^2([a, b]; \mathbb{K}^{n \times n})$ au lieu de $L^2_{\mathcal{H}}([a, b]; \mathbb{K}^{n \times n})$. Remarquons également qu'en raison de la positivité de \mathcal{H} , nous obtenons un produit scalaire correctement posé. La raison principale de ces choix est, que de cette manière, la norme des trajectoires d'état représentera l'énergie du système hamiltonien à ports.

Définition On dit qu'un système est un système hamiltonien à ports linéaire du premier ordre lorsqu'il est régi par une équation aux dérivées partielles de la forme suivante :

$$\frac{\partial x}{\partial t}(\zeta, t) = P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t)) + P_0(\mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t)) \quad (2.8)$$

avec comme hamiltonien associé $E : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ donné par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_a^b x(\zeta, t)^* \mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t) d\zeta, \quad (2.9)$$

où nous notons $P_1 \in \mathbb{K}^{n \times n}$ une matrice inversible et hermitienne ($P_1^* = P_1$), $P_0 \in \mathbb{K}^{n \times n}$ une matrice anti-hermitienne ($P_0^* = -P_0$) et $\mathcal{H} \in L^\infty([a, b]; \mathbb{K}^{n \times n})$ tel que $mI \leq \mathcal{H}(\zeta) \leq MI$ pour tout $\zeta \in [a, b]$ et des constantes $m, M > 0$ indépendantes de ζ .



La dénomination de système hamiltonien à ports vient du fait que l'hamiltonien de ce système ne peut être modifié qu'au travers des ports situés aux extrémités. Cette propriété sera démontrée en fin de chapitre, voir théorème 2.1. Par ailleurs, nous avons choisi de noter l'hamiltonien pour ces systèmes E pour éviter toute confusion avec l'opérateur \mathcal{H} . En effet, dans la plupart des cas, l'hamiltonien de ces systèmes dynamiques représente l'énergie.

Pour complètement nous familiariser avec cette classe de systèmes, nous allons présenter un nouvel exemple dont l'espace d'état est de dimension finie : \mathbb{R}^n . Considérons le circuit électrique représenté à la figure 2.2.

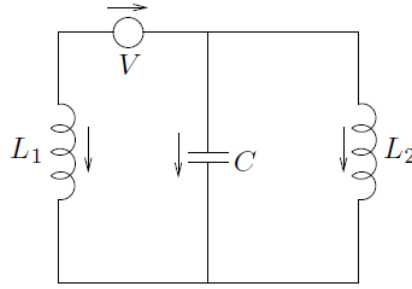


FIGURE 2.2 – Circuit électrique

Notons respectivement V_{L_1} , V_{L_2} , L_1 et L_2 le potentiel et les inductances des inducteurs 1 et 2. Notons également C la capacité électrique associée au condensateur. Par simplicité, supposons que les inductances L_1 et L_2 soient constantes. De plus, de la loi de Lenz-Faraday découle la relation suivante liant l'intensité du courant I_L et le potentiel à travers le solénoïde d'inductance L .

$$V_L(t) = L \frac{dI_L}{dt}(t) \quad (2.10)$$

Par ailleurs, par la relation caractéristique du condensateur C , nous pouvons écrire

$$I_c(t) = C \frac{dV_c}{dt}(t), \quad (2.11)$$

où I_c est l'intensité du courant qui traverse le condensateur et V_c le potentiel associé.

Nous considérons comme variables I_{L_1} , I_{L_2} et V_c . De manière à pouvoir décrire la dynamique du circuit électrique, rappelons les deux lois de Kirchhoff [13].

1^{ère} loi : La somme des courants arrivant en un nœud du circuit est égale à la somme des courants quittant ce nœud. (Principe de conservation de la charge)

2^{ème} loi : La somme des différences de potentiel électrique rencontrées successivement sur un contour fermé du circuit est nulle. (Loi de conservation de l'énergie)

En utilisant (2.10) et (2.11) et appliquant les deux lois de Kirchhoff à notre exemple, nous obtenons les équations suivantes :

$$L_1 \frac{dI_{L_1}}{dt}(t) = V_{L_1}(t) = V_c(t) + V(t); \quad (2.12)$$

$$L_2 \frac{dI_{L_2}}{dt}(t) = V_{L_2}(t) = V_c(t); \quad (2.13)$$

$$C \frac{dV_c}{dt}(t) = I_c(t) = -I_{L_1}(t) - I_{L_2}(t). \quad (2.14)$$

Montrons qu'il s'agit d'un cas particulier de système hamiltonien à ports. Tout d'abord, il n'y a pas de dépendance suivant une quelconque variable spatiale ζ . Dès lors, nous pouvons fixer P_1 comme étant la matrice nulle. Ensuite, en fixant

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \text{ et } P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L_1 C} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2 C} \\ \frac{-1}{L_1 C} & \frac{-1}{L_2 C} & 0 \end{bmatrix},$$

nous constatons que les équations (2.12), (2.13) et (2.14) peuvent se réexprimer sous la forme de l'équation (2.8). Le lecteur pourra vérifier que les matrices P_1 et P_0 sont respectivement auto-adjointe et anti-hermitienne et que la matrice \mathcal{H} est définie positive. Pour cet exemple, l'énergie est égale à

$$E = \frac{1}{2}(L_1 I_{L_1}^2 + L_2 I_{L_2}^2 + C V_C^2).$$

Exprimons l'expression de la variation de l'énergie. Il nous faut donc dériver l'expression de l'énergie le long de la solution du système d'équations (2.12), (2.13) et (2.14).

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= L_1 \frac{dI_{L_1}}{dt}(t) I_{L_1}(t) + L_2 \frac{dI_{L_2}}{dt}(t) I_{L_2}(t) + C \frac{dV_C}{dt}(t) V_C(t) \\ &= (V_C(t) + V(t)) I_{L_1}(t) + V_C(t) I_{L_2}(t) + (-I_{L_1}(t) - I_{L_2}(t)) V_C(t) \\ &= V(t) I_{L_1}(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nous remarquons qu'une modification de l'énergie du système n'est possible qu'en agissant sur le potentiel et l'intensité. Dès lors, la dérivée de l'énergie du système en fonction du temps peut donc s'exprimer comme le produit entre l'entrée (le potentiel) et la sortie (intensité du courant au solénoïde L_1) du circuit électrique. Pour les deux exemples présentés, nous avons donc une propriété récurrente qui affirme qu'une modification de l'énergie est uniquement possible via les conditions frontières ou les entrées et sorties du système.

Le théorème suivant énonce que tout système hamiltonien à ports possède nécessairement cette propriété. Ce théorème requiert également le concept de solution classique. Rappelons ce que nous considérons par solution classique.

Définition On appelle solution classique de l'équation (2.8) une fonction $x : [0, \tau] \rightarrow X$ qui appartient à l'espace fonctionnel $C^1([0, \tau]; X)$ et qui satisfait l'équation (2.8).



Théorème 2.1

Supposons que l'équation (2.8) admette une solution classique notée x . Alors l'égalité suivante est vérifiée :

$$\frac{dE}{dt}(t) = \frac{1}{2} [(\mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t))^* P_1 \mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t)]_a^b. \quad (2.16)$$

Démonstration

Nous commençons par utiliser la définition de l'énergie (2.9) où nous permutons la dérivée et l'intégrale et nous obtenons ainsi

$$\frac{dE}{dt}(t) = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial x}{\partial t}(\zeta, t)^* \mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t) d\zeta + \frac{1}{2} \int_a^b x(\zeta, t)^* \mathcal{H}(\zeta) \frac{\partial x}{\partial t}(\zeta, t) d\zeta.$$

Par ailleurs, x est une solution classique de l'équation (2.8). Dès lors, nous avons que

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= \frac{1}{2} \int_a^b (P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t)) + P_0 (\mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t)))^* \mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t) d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_a^b x(\zeta, t)^* \mathcal{H}(\zeta) (P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t)) + P_0 (\mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t))) d\zeta. \end{aligned}$$

Par définition d'un système hamiltonien à ports, les matrices P_1 et $\mathcal{H}(\zeta)$ sont auto-adjointes. De plus, la matrice P_0 est, quant à elle, anti-hermitienne. Dès lors, nous pouvons réexprimer la dérivée de l'énergie en fonction du temps de la manière suivante.

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= \frac{1}{2} \int_a^b (\frac{\partial}{\partial \zeta} (\mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t)))^* P_1 \mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t) + (\mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t))^* (P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t))) d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_a^b -(\mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t))^* P_0 \mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t) + (\mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t))^* P_0 \mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t) d\zeta. \end{aligned}$$

Les termes de la seconde intégrale s'annulent et par la règle de la dérivation en chaîne, nous avons que

$$\frac{dE}{dt}(t) = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial}{\partial \zeta} [(\mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t))^* P_1 \mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t)] d\zeta.$$

Finalement, par le théorème fondamental du calcul intégral suivant ζ , nous obtenons que

$$\frac{dE}{dt}(t) = [(\mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t))^* P_1 \mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t)]_a^b.$$

□

Le chapitre 3 présente la théorie des semi-groupes qui nous sera utile pour d'une part caractériser les conditions frontières pour lesquelles un système hamiltonien à ports admet une solution sur l'espace de Hilbert $L^2([a, b]; \mathbb{K}^{n \times n})$ et d'autre part pour pouvoir appliquer un contrôle à ce même système.

Chapitre 3

Semi-groupes et théorèmes de génération

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit la classe des systèmes hamiltoniens à ports en dimension infinie. Cette classe de systèmes est décrite par une EDP. Nous voudrions pouvoir réexprimer cette EDP comme une équation différentielle ordinaire $\dot{x}(t) = Ax(t)$ et, en caractériser la solution. Ces objectifs motivent l'utilisation de la théorie des semi-groupes. En effet, la situation la plus courante dans laquelle on retrouve un semi-groupe est lorsqu'il définit la solution d'un problème de Cauchy.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

En dimension finie, nous savons que la solution est définie par $x(t) = e^{At}x_0$ avec A une matrice de dimension $n \times n$. La théorie des semi-groupes nous permet d'opérer une généralisation de la fonction e^{At} au cas de la dimension infinie, c'est-à-dire, avec A un opérateur défini sur un espace de Banach X . En outre, l'approche semi-groupe a été largement utilisée pour l'étude des systèmes à paramètres distribués et a également facilité la généralisation des résultats concernant les systèmes de dimension finie à la dimension infinie.

Cette théorie des semi-groupes est une théorie riche dont on ne présente dans ce chapitre que les éléments théoriques essentiels qui vont nous permettre de réaliser les points suivants :

- Reformuler tout problème décrit par un système hamiltonien à ports sous la forme d'un problème de Cauchy standard admettant une solution unique et continûment définie ;
- Dériver différents critères permettant de vérifier la stabilité exponentielle d'un système hamiltonien à ports ;
- Démontrer l'existence et l'unicité d'une solution continûment définie pour tout système hamiltonien muni d'entrées et de sorties.

Une connaissance suffisante de la théorie des semi-groupes est un passage obligé pour une condition nécessaire pour la réalisation de cet objectif. La théorie développée ici le sera sur un espace de Banach X , c'est-à-dire, sur un espace vectoriel normé et complet. Notons également que les différents résultats et les démonstrations qui leur sont associés se basent sur les livres [5] et [8]. Le lecteur souhaitant approfondir cette théorie pourra s'y référer.

3.1 Semi-groupes fortement continus

Un semi-groupe fortement continu ou plus communément appelé C_0 semi-groupe peut être vu comme une généralisation de la fonction exponentielle. En dimension finie, la solution du problème

de Cauchy (3.1) est donnée par la fonction exponentielle. De manière identique, un semi-groupe fortement continu fournit une solution à ce même problème de Cauchy sur un espace de Banach.

Définition Une famille d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach X est qualifiée de semi-groupe fortement continu si elle satisfait les propriétés suivantes :

1. $T(t+s) = T(t)T(s)$ avec $t, s \geq 0$;
2. $T(0) = I$;
3. $\forall x \in X$, l'application $T(\cdot)x$ est fortement continue sur $[0, \infty[$.



En nous attardant sur la définition d'un semi-groupe fortement continu, on peut faire deux constatations importantes. Premièrement, les deux premiers axiomes de cette définition sont algébriques et définissent une structure de semi-groupe tandis que la dernière est topologique. Deuxièmement, il est également important de remarquer que les hypothèses de continuité de l'opérateur $T(t)$ et de continuité de l'application $T(\cdot)x$ sont distinctes. En effet, d'une part, on caractérise la continuité de $T(t) : X \rightarrow X$ par

$$\forall x \in X \quad \lim_{z \rightarrow x} T(t)z = T(t)x.$$

Cela revient à un calcul de limite dans un espace de Banach X . D'autre part, $T(\cdot)x$ est continu sur $[0, +\infty[$.

$$\forall t \in [0, +\infty[\quad \lim_{h \rightarrow 0^+} T(t+h)x = T(t)x$$

ce qui implique dans ce cas un calcul de limite sur $[0, +\infty[$. Notons également que l'on peut définir l'application suivante pour tout $x \in X$

$$\epsilon_x : t \rightarrow \epsilon_x(t) := T(t)x. \quad (3.2)$$

La condition de continuité forte d'un semi-groupe est équivalente à la continuité forte de l'application ϵ_x .

L'objectif de la proposition suivante va être de simplifier la vérification de la continuité forte. Cela est rendu possible par le théorème de la borne uniforme.

Proposition 3.1.1

Considérons un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach X . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $(T(t))_{t \geq 0}$ est fortement continu.
2. $\forall x \in X \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$.

Démonstration

L'implication du point 1 vers le point 2 est évidente par définition de la continuité forte appliquée en particulier en 0.

Pour monter que le point 2 vers le point 1, nous devons montrer la continuité en tout point t dans \mathbb{R}^+ . Pour ce faire, considérons $t_0 > 0$ et $x \in X$. Nous allons montrer la continuité à droite et à gauche.

Puisque $T(t_0 + h) = T(t_0)T(h)$ et par propriété de la norme, nous avons

$$\|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| \leq \|T(t_0)\| \|T(h)x - x\|.$$

De plus, par passage à la limite et par le point 2, nous obtenons

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| = 0$$

ce qui prouve la continuité à droite. Il nous reste à démontrer la continuité à gauche pour terminer cette preuve. Considérons $h < 0$. De plus, de manière semblable que pour la continuité à droite, nous avons la relation suivante

$$\|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| \leq \|T(t_0 + h)\| \|x - T(-h)x\|$$

et lorsque nous faisons tendre h vers 0^- , nous obtenons que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| = 0$$

ce qui prouve la continuité à gauche. □

Proposition 3.1.2

Considérons un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach X . Alors il existe des constantes $w \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que

$$\forall t \geq 0 \quad \|T(t)\| \leq Me^{wt}. \quad (3.3)$$

Démonstration

Par hypothèse, nous savons que $(T(t))_{t \geq 0}$ est une famille d'opérateurs bornés qui implique qu'il existe $M \geq 1$ tel que $\|T(s)\| \leq M$ pour tout $0 \leq s \leq 1$. Considérons $t \geq 0$ comme $t = s + n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, puisque $T(s + n) = T(s)T(n)$ et par la propriété de la norme, nous obtenons

$$\|T(t)\| \leq \|T(s)\| \|T(1)\|^n \leq M^{n+1} = Me^{n \log M}$$

Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante, nous avons que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ est vérifié pour $w := \log M$. □

L'infimum pris sur tous les exposants possibles pour lesquelles la condition (3.3) soit vérifiée pour un semi-groupe fortement continu joue un rôle important, notamment, dans l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques sous la forme $\dot{x} = Ax$. Ce sujet sera abordé dans le chapitre 5 portant sur la stabilité d'un système hamiltonien à ports. Dans la littérature mathématique, cet infimum porte le nom de borne de croissance.

Définition Pour un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$, nous définissons la borne de croissance par

$$w_0 := \inf\{w \in \mathbb{R} : \text{il existe } M_w \geq 1 \text{ tel que } \|T(t)\| \leq M_w e^{wt} \text{ pour tout } t \geq 0\}.$$



Avant de terminer cette section sur les semi-groupes fortement continus, nous noterons que lorsque $w = 0$ et $M = 1$ dans la proposition 3.1.2 alors le semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ est une application contractante. Nous y reviendrons à la fin de la section 3.3.

3.2 Semi-groupes uniformément continus

Retournons à la question qui a été posée en début de chapitre, nous souhaitons trouver une solution au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

avec A un opérateur linéaire borné. En dimension finie, en résolvant cette équation différentielle homogène, on peut obtenir aisément la solution $x(t) = e^{tA}x_0$ avec $A \in M_n(\mathbb{C})$. Cette fonction est différentiable et la relation entre $(T(t))_{t \geq 0}$ et la matrice A est donnée par

$$\left. \frac{dT(t)}{dt} \right|_{t=0} = A.$$

Nous désirons étendre ce résultat sur un espace de Banach de dimension infinie X . Pour atteindre ce but, il suffit de supposer que l'application $T : [0, \infty[\rightarrow \mathcal{L}(X)$ soit continue dans la norme de l'opérateur et que l'opérateur A soit borné. La proposition 3.2.1 nous donne cette généralisation mais affirme en plus que tout semi-groupe uniformément continu est de la forme $T(t) := e^{tA}$. La démonstration de cette proposition ne sera pas énoncée, néanmoins, le lecteur pourra se référer à [5, p.17].

Proposition 3.2.1

En définissant

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \text{ avec } A \in \mathcal{L}(X)$$

alors les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. $(e^{tA})_{t \geq 0}$ définit un semi-groupe sur l'espace X tel que l'application $t \rightarrow e^{tA}$ est continue. Ce semi-groupe est dit semi-groupe uniformément continu.
2. $T(t) := e^{tA}$ est différentiable et satisfait l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t).$$

Par ailleurs, tout semi-groupe uniformément continu $(T(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach X est de la forme $T(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$ avec $A \in \mathcal{L}(X)$.

3.3 Semi-groupe et opérateur résolvant

Dans la section précédente, nous avons énoncé des résultats pour des semi-groupes uniformément continus. Notamment, *tout semi-groupe uniformément continu est caractérisé par une fonction exponentielle d'un opérateur A linéaire borné*. Cependant, ces résultats demandent des hypothèses fortes comme la continuité uniforme ou une équation différentielle décrite par un opérateur linéaire borné. En pratique, nous n'avons généralement pas ces hypothèses. Cette section va donc être consacrée à l'obtention de résultats similaires pour des semi-groupes fortement continus. On y arrive par le biais d'un opérateur A linéaire fermé et densément défini mais pas nécessairement borné.

Nous allons maintenant définir l'opérateur et son domaine associé.

Définition Le générateur $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach X est l'opérateur

$$Ax := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (T(h)x - x) \quad (3.4)$$

défini pour tout élément x appartenant au domaine

$$D(A) := \{x \in X : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (T(h)x - x) \text{ existe}\}. \quad (3.5)$$



Le générateur consiste effectivement en un couple $(A, D(A))$ car lorsque l'on modifie A ou $D(A)$, c'est-à-dire, respectivement l'équation différentielle ou les conditions frontières, on obtient une solution différente, c'est-à-dire, un semi-groupe distinct. Par facilité, nous noterons le générateur d'un semi-groupe généralement par A . Toutefois, il faudra garder à l'esprit que implicitement, on considère le couple $(A, D(A))$.

Nous allons maintenant présenter un lemme qui sera abondamment utilisé pour la démonstration des théorèmes de génération. Un des résultats importants de ce lemme est la relation qui lie un semi-groupe et son générateur. En effet, nous retrouvons la même relation qu'en dimension finie avec la fonction exponentielle

$$T(t)x = e^{tA}x \text{ avec } t \geq 0 \text{ et } Ax = \left. \frac{d}{dt}T(t) \right|_{t=0} x.$$

Lemme 3.3.1

Considérons le générateur $(A, D(A))$ d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ est un opérateur linéaire.

2. Si $x \in D(A)$, alors $T(t)x \in D(A)$ et $\forall t \geq 0$

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x.$$

3. $\forall t \geq 0$ et $x \in X$, nous avons que

$$\int_0^t T(s)x ds \in D(A).$$

4. $\forall t \geq 0$, nous avons que

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= A \int_0^t T(s)x ds, \text{ si } x \in X \\ &= \int_0^t T(s)Ax ds, \text{ si } x \in D(A). \end{aligned}$$

Démonstration

1. L'assertion 1 est évidente. En effet, par (3.2) et (3.4), nous avons que, pour tout $x \in D(A)$, Ax est la dérivée à droite de ϵ_x . L'application $\epsilon_x(\cdot)$ est linéaire en fonction du temps et par conséquent, l'application $\dot{\epsilon}_x(\cdot)$ est, elle-aussi, linéaire.

2. Considérons $x \in D(A)$. Dès lors, par (3.4) et (3.5), on en déduit que $1/h(T(t+h)x - T(t)x)$ converge vers $T(t)Ax$ lorsque h tend vers 0 par la droite.

Par conséquent,

$$AT(t)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h}(T(h)T(t)x - T(t)x) = T(t)Ax \quad \text{avec } x \in D(A)$$

existe et par (3.5), $T(t)x \in D(A)$.

3. Considérons $x \in X$ et $t \geq 0$. Nous devons montrer que la limite suivante existe.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h (T(s+h)x - T(s)x) ds$$

Puisque l'application $T(h)$ est indépendante de l'intégrale et par le changement de variable $s := s + h$, on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(T(h) \int_0^t T(s)x ds - \int_0^t T(s)x ds) &= \frac{1}{h} \int_0^t T(s+h)x ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x ds. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant montrer que la limite existe et qu'elle converge vers $T(t)x - x$ lorsque h tend vers 0 par la droite.

$$\underbrace{\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds}_{(1)} - \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x ds}_{(2)}$$

(1) Par le théorème de la valeur moyenne, nous avons qu'il existe s_t appartenant à l'intervalle $[t, t+h]$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} h T(s_t)x.$$

Puisque l'opérateur T est fortement continu, nous avons finalement

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} T(s_t)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} T(s_t)x = T(t)x.$$

En effet, puisque $t \leq s_t \leq t+h$, nous avons que s_t converge vers t lorsque h tend vers 0 par la droite.

(2) en appliquant le même raisonnement, on obtient que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x ds = x$.

4. Par la démonstration du point précédent, nous savons que pour x dans X , $T(t)x - x = A \int_0^t T(s)x ds$. Le résultat est donc déjà démontré lorsque $x \in X$. Considérons maintenant $x \in D(A)$. Par ailleurs, en utilisant une nouvelle fois la convergence démontrée au point précédent, nous avons que la suite de fonctions $f_n(s) := nT(s)(T(h)x - x)$ converge uniformément sur $[0, t]$ vers la fonction $f(s) := T(s)Ax$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Utilisons la convergence uniforme pour permuter limite et intégrale dans les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (T(h) - I) \int_0^t T(s)x ds = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^t T(s) \frac{1}{h} (T(h) - I)x ds \\ &= \int_0^t T(s)Ax ds. \end{aligned}$$

□

Comme cela a déjà été mentionné, le générateur d'un semi-groupe n'est pas nécessairement borné. Néanmoins, il possède des propriétés intéressantes. La démonstration du théorème suivant ne sera pas énoncée. Toutefois, le lecteur le souhaitant pourra se référer à [5, p.37-38].

Théorème 3.3.2

Le générateur d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ est fermé et densément défini dans X . Par ailleurs, ce générateur permet de déterminer de manière unique ce semi-groupe.

Nous allons désormais énoncer une formule permettant de lier l'opérateur résolvant au semi-groupe. Nous commençons par rappeler la définition d'un opérateur résolvant. La définition d'un opérateur résolvant étant intimement liée à l'étude spectral dans un espace de Banach, nous commençons par définir respectivement le spectre et l'ensemble résolvant d'un opérateur A .

$$\sigma(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ n'est pas bijectif} \}$$

$$\rho(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ est bijectif} \} = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$$

Définition Considérons un opérateur A fermé ayant comme domaine $D(A)$. On définit l'opérateur résolvant de la manière suivante :

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1} \text{ avec } \lambda \in \rho(A).$$

♣

Le lemme suivant énonce un résultat fort utile à la démonstration du théorème 3.3.4. Sa démonstration ne sera pas explicitée voir [5, lemme 1.9].

Lemme 3.3.3

Considérons le générateur d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $t > 0$, les identités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} T(t)x - x &= (A - \lambda) \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x ds, \text{ si } x \in X \\ &= \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)(A - \lambda)x ds, \text{ si } x \in D(A). \end{aligned}$$

Le théorème 3.3.4 présente le lien par transformation de Laplace entre le semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ et l'opérateur A . Dans la preuve du théorème 3.3.4, nous allons utiliser la propriété de redimensionnement d'un semi-groupe fortement continu. En effet, à partir d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$, on peut obtenir un nouveau semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$ par la relation suivante :

$$S(t) := e^{\mu t} T(\alpha t) \text{ avec } \mu \in \mathbb{C} \text{ et } \alpha > 0.$$

Notons également que la structure d'un semi-groupe fortement continu est conservée par transformation de similitude ainsi que par les opérations de quotient et de produit.

Théorème 3.3.4

Considérons un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach X et les constantes $w \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt} \text{ pour } t \geq 0.$$

Alors, les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que la transformée de Laplace du semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ notée $R(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt$ existe pour tout $x \in X$ alors $\lambda \in \rho(A)$ et $R(\lambda, A) = R(\lambda)$.
2. Si $\operatorname{Re} \lambda > w$, alors $\lambda \in \rho(A)$. De plus, l'opérateur résolvant est donné par l'expression de l'intégrale au point 1.
3. L'opérateur résolvant est borné, c'est-à-dire, $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} \lambda - w}$ pour tout $\operatorname{Re} \lambda > w$.

Démonstration

Commençons par démontrer le point 1. Par la propriété de redimensionnement d'un semi-groupe fortement continu, il est suffisant de démontrer ce point pour $\lambda = 0$. Considérons $x \in X$ de manière arbitraire et $h > 0$. Par définition de l'opérateur $R(\lambda)$, on obtient les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} R(0)x &= \frac{T(h) - I}{h} \int_0^\infty T(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s+h)x ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^\infty T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s)x ds \\ &= -\frac{1}{h} \int_0^h T(s)x ds \end{aligned}$$

En faisant tendre h vers 0^+ , et en appliquant un raisonnement similaire à celui du point 3 du lemme 3.3.1, nous obtenons que l'image de l'opérateur $R(0)$ est incluse ou égale au domaine $D(A)$. Par ailleurs, nous avons la relation $AR(0) = -I$. En outre, lorsque $x \in D(A)$, nous avons les relations suivantes en utilisant l'assertion 4 du lemme 3.3.1.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t T(s)x ds &= R(0)x \\ \lim_{t \rightarrow \infty} A \int_0^t T(s)x ds &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t T(s)Ax ds = R(0)Ax \end{aligned}$$

De plus, par le théorème 3.3.4, l'opérateur A est fermé, ce qui implique que $R(0)Ax = AR(0)x = -x$ pour tout $x \in D(A)$. Par conséquent, nous avons que $R(0) = (-A)^{-1} = R(0, A)$.

Le point 2 est déduit directement du point 1. Dès lors, il ne nous reste qu'à démontrer le point 3 pour compléter cette preuve. En utilisant la monotonie de l'intégrale et le fait que $\|T(t)\| \leq M e^{wt}$,

nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t e^{-\lambda s} T(s) ds \right\| &\leq \int_0^t \|e^{-\lambda s}\| \|T(s)\| ds, \\
&\leq M \int_0^t \|e^{-Re\lambda s} e^{-Im\lambda s}\| e^{ws} ds, \\
&\leq M \int_0^t \|e^{-Re\lambda s}\| e^{ws} ds, \\
&= M \int_0^t e^{-Re\lambda s} e^{ws} ds = M \int_0^t e^{(w-Re\lambda)s} ds.
\end{aligned}$$

Nous pouvons en déduire l'inégalité suivante.

$$\|R(\lambda, A)\| \leq M \int_0^t e^{(w-Re\lambda)s} ds$$

Puisque la partie réelle de λ est strictement supérieure à w , nous avons que le terme de droite converge vers $M/(Re\lambda - w)$ lorsque t converge vers l'infini.

□

Le semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ est solution d'un problème de Cauchy standard si et seulement si

$$\dot{T}(t)x = AT(t)x.$$

De plus, le théorème 3.3.4 affirme que la transformée de Laplace du semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ coïncide avec l'opérateur résolvant c'est-à-dire

$$\widehat{T(t)}x = (\lambda I - A)^{-1}x.$$

En appliquant la transformation de Laplace inverse notée \mathcal{L}^{-1} , on obtient l'expression du semi-groupe

$$T(t)x = \mathcal{L}^{-1}((sI - A)^{-1}x)$$

qui peut être aisément calculée en utilisant la méthode de décomposition en fractions simples. De manière lapidaire, la transformation de Laplace nous permet de calculer de manière purement algébrique le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$.

A ce stade, nous pouvons effectuer quelques remarques sur la théorie qui a été présentée jusqu'à présent. Tout d'abord, nous avons montré que la définition d'une solution d'un problème de Cauchy sur un espace de Banach est possible par le truchement d'un semi-groupe uniformément continu associé à un opérateur borné. Néanmoins, en pratique nous ne vérifions pas les hypothèses de continuité uniforme ou de bornitude de l'opérateur qui est généralement défini par une équation aux dérivées partielles. Ensuite, nous avons relaxé l'hypothèse en considérant un semi-groupe fortement continu et montré que l'on obtient une généralisation analogue. Un semi-groupe fortement continu nous permet donc de définir une solution à un problème de Cauchy standard sur un espace de Banach. Une solution existe-elle toujours ? En d'autres termes, est-ce qu'un opérateur A , avec son domaine associé $D(A)$, engendre toujours un semi-groupe fortement continu ? La suite de la théorie présentée porte sur la mise en place de résultats nous offrant des conditions nécessaires et suffisantes. Nous allons démontrer trois grands résultats pour la génération de semi-groupes dont les théorèmes de Hille et Yosida et de Lümer et Phillips.

Dans le but de simplifier les différentes démonstrations, nous nous plaçons dans le cas particulier d'un semi-groupe de contraction.

Définition Considérons un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach X . Le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est dit semi-groupe de contraction lorsque $\|T(t)\| \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.

♣

3.4 Théorème de Hille et Yosida

Dans cette section, nous allons énoncer et démontrer un théorème fondamental de la théorie des semi-groupes : le théorème de Hille et Yosida. Ce théorème nous fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur A fermé et densément défini soit générateur d'un semi-groupe de contraction fortement continu. En d'autres termes, le théorème nous donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur représentant une EDP engendre un semi-groupe de contraction $(T(t))_{t \geq 0}$ fortement continu qui soit solution de cette EDP. Afin de pouvoir démontrer ce résultat, nous allons avoir recours au lemme 3.4.1.

Lemme 3.4.1

Considérons un opérateur A fermé et densément défini sur un espace de Banach X . Supposons qu'il existe $w \in \mathbb{R}$ et $M > 0$ tel que $[w, \infty[\subset \rho(A)$ et $R(\lambda, A)$ reste borné lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, c'est-à-dire, qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}_0^+$ tel que, pour tout $\lambda > \lambda_0$, nous avons $\|\lambda R(\lambda, A)\| < M$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$.

Alors,

1. $\forall x \in X \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x.$
2. $\forall x \in D(A) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda AR(\lambda, A)x = \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax.$

Démonstration

1. Considérons $x \in X$. Par hypothèse, nous savons que $D(A)$ est un sous-ensemble dense dans X . Ce concept de densité reflète l'idée que pour tout x dans X , il existe un élément $y \in D(A)$ aussi proche que possible du x fixé. En effet, nous avons que

$$\begin{aligned} x \in X = \overline{D(A)} &\Rightarrow \exists (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x \\ &\Rightarrow \exists z \in D(A) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \|z - x\| < \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

De plus, par hypothèse, nous avons que $\|R(\lambda, A)\| < \frac{1}{\lambda}$. Cela nous permet d'affirmer qu'il existe un λ_0 appartenant à $]0, \infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{\epsilon}{3\|Az\|}$. Nous devons démontrer que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x$. Par définition de limite, cela signifie que l'on doit démontrer que

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \tilde{\lambda}_0 \in \mathbb{N}_0 \quad \text{tel que } \forall \lambda \geq \tilde{\lambda}_0 \quad \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| < \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$. Nous allons ajouter et retirer les termes $\lambda(\lambda I - A)^{-1}z$ et z , et appliquer l'inégalité triangulaire.

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &= \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - x\| \\ &= \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - \lambda(\lambda I - A)^{-1}z + \lambda(\lambda I - A)^{-1}z - z + z - x\| \\ &\leq \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}(x - z)\| + \|(\lambda I - A + A)(\lambda I - A)^{-1}z - z\| + \|z - x\| \\ &< \lambda\|(\lambda I - A)^{-1}\| \|x - z\| + \|z + (\lambda I - A)^{-1}Az - z\| \\ &< \frac{\lambda}{\lambda} \|x - z\| + \|z - x\| + \|(\lambda I - A)^{-1}\| \|Az\| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Prendre $\tilde{\lambda}_0 := \lambda_0$ convient.

2. Montrons que pour tout $x \in D(A)$ nous avons que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda AR(\lambda, A)x = \lambda R(\lambda, A)Ax = x$.

Considérons $x \in D(A)$. Par définition de l'opérateur A , si $x \in D(A)$ alors $Ax \in X$. On peut donc appliquer l'assertion 1 à l'élément Ax .

$$\xrightarrow{1} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda AR(\lambda, A)x = x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)Ax.$$

□

Nous avons dès à présent tous les éléments nécessaires à la démonstration du théorème de Hille-Yosida.

Théorème 3.4.2 (Hille-Yosida)

Considérons un opérateur A défini sur un espace de Banach X . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $(A, D(A))$ engendre un semi-groupe de contraction fortement continu.
2. $(A, D(A))$ est fermé, densément défini tel que $]0, \infty[\subset \rho(A)$. De plus, nous avons l'inégalité suivante :

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda} \text{ avec } \lambda \in]0, \infty[.$$

Démonstration $1 \Rightarrow 2$ Cette implication est rendue évidente par les théorèmes 3.3.2 et 3.3.4.

$2 \Rightarrow 1$ Pour démontrer cette implication, nous commençons par définir l'approximant de Yosida.

$$\begin{aligned} A_n &:= nAR(n, A) \\ &= n(R(n, A) - I) \\ &= n^2R(n, A) - n \end{aligned}$$

Dès lors, nous venons de construire une suite d'opérateurs bornés $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. En effet, l'opérateur résolvant étant borné nous avons que

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \exists M_n > 0 \text{ tel que } M_n := n^2c_n - n \|A_n\| \leq M_n \text{ avec } \|R(n, A)\| \leq c_n.$$

Or un opérateur borné génère un semi-groupe uniformément continu donné par

$$T_n(t) := e^{tA_n}, \quad t \geq 0.$$

Par le lemme précédent, nous avons que $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$ puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = \lim_{n \rightarrow \infty} nAR(n, A)x = Ax \text{ avec } x \in D(A).$$

Pour démontrer, la partie suffisante du théorème, il nous suffit de démontrer les résultats suivants :

- (i) $\forall x \in X \ T(t)x := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t)x$ existe.
- (ii) $(T(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de contraction fortement continu sur X .
- (iii) Le semi-groupe a pour générateur $(A, D(A))$.

On définit le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ comme la limite d'une suite de semi-groupes. Montrons tout d'abord que cette limite existe et que définir le semi-groupe de cette manière est cohérent.

$$(i) \ \forall x \in X \ T(t)x := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t)x \text{ existe}$$

Avant toute chose, démontrons que le semi-groupe $(T_n(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de contraction en utilisant l'hypothèse que $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

$$\begin{aligned} \|T_n(t)\| = \|e^{tA_n}\| &= \|e^{t(n^2R(n, A) - nI)}\| \\ &= \|e^{-nt} e^{n^2R(n, A)t}\| \\ &= e^{-nt} \|e^{n^2R(n, A)t}\| \\ &\leq e^{-nt} e^{n^2\|R(n, A)\|t} \\ &\leq e^{-nt} e^{nt} = 1 \end{aligned}$$

Notons qu'il suffit de montrer la convergence sur $D(A)$ par densité de cet ensemble dans X . Par le théorème du calcul intégral appliqué aux fonctions

$$s \longrightarrow T_m(t-s)T_n(s)x$$

$\forall 0 \leq s \leq t \forall x \in D(A)$ avec $m, n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$T_n(t)x - T_m(t)x = \int_0^t \frac{d}{ds}(T_m(t-s)T_n(s)x)ds$$

En utilisant la règle de dérivation d'un produit de fonctions, la commutativité du semi-groupe $(T_n(t))_{t \geq 0}$ et le théorème 1.10, nous obtenons les relations suivantes.

$$\begin{aligned} T_n(t)x - T_m(t)x &= \int_0^t \frac{d}{ds}(T_m(t-s)T_n(s)x)ds \\ &= \int_0^t \frac{d}{ds}(T_m(t-s))T_n(s)x + \frac{d}{ds}(T_n(s))T_m(t-s)x ds \\ &= \int_0^t -T_m(t-s)A_m T_n(s)x + T_m(t-s)T_n(s)A_n(s)x ds \\ &= \int_0^t T_m(t-s)T_n(s)(A_n x - A_m x)ds \end{aligned}$$

Par conséquent, en prenant la norme, en utilisant la monotonie de l'intégrale et l'hypothèse d'un semi-groupe de contraction on obtient les inégalités suivantes.

$$\begin{aligned} \|T_n(t)x - T_m(t)x\| &\leq \int_0^t \|T_m(t-s)T_n(s)(A_n x - A_m x)\|ds \\ &\leq \int_0^t \|T_m(t-s)\| \|T_n(s)\| \|A_n x - A_m x\|ds \\ &\leq t \|A_n x - A_m x\| \end{aligned}$$

Dès lors, nous obtenons la relation suivante.

$$\|T_n(t)x - T_m(t)x\| \leq t \|A_n x - A_m x\| \quad (3.6)$$

Par le lemme précédent, nous avons que $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. En effet, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x - A_m x\| = \|A x - A x\| = 0 \text{ avec } m \geq n$$

par continuité de la norme. La relation (3.6) nous permet d'affirmer que la suite $(T_n(t)x)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeur dans X est une suite de Cauchy. En outre, l'espace X est un espace de Banach et est donc complet. Dès lors, cela implique que $(T_n(t)x)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente et admet ainsi une limite. De plus, cette limite appartient à X . Par conséquent, on peut définir

$$T(t)x := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t)x.$$

Par ailleurs, la suite $(T_n(t)x)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également de manière uniforme sur chaque intervalle $[0, t_0]$. En effet, l'inégalité (3.6) est indépendante de tout t compris dans l'intervalle $[0, t_0]$.

(ii) Montrons que $(T(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de contraction fortement continu.

Commençons par montrer que nous avons un semi-groupe.

1.

$$\begin{aligned} T(t+s)x &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t+s)x = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t)T_n(s)x \\ &= T(t)x T(s)x \end{aligned}$$

2.

$$T(0)x = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(0)x = \lim_{n \rightarrow \infty} Ix = x$$

3. $T(t) \in \mathbb{L}(X)$ par le théorème de Banach-Steinhaus.

Démontrons que ce semi-groupe est un semi-groupe de contraction. Par définition, nous devons démontrer que $\forall x \in X \ ||T(t)x| \leq ||x|$.

Pour ce faire, nous allons utiliser la définition du semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ et la continuité de la norme.

$$\begin{aligned} ||T(t)x|| &= ||\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t)x|| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} ||T_n(t)x|| \\ &\leq ||x|| \end{aligned}$$

La continuité forte est une conséquence de la convergence uniforme de $(T_n(t)x)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $T(t)x$. En effet, l'application $\epsilon : t \rightsquigarrow T(t)x$ est continue sur chaque intervalle $[0, t_0]$ puisqu'elle est obtenue comme limite uniforme sur $[0, t_0]$ d'une suite de fonctions continues $(T_n(t)x)_{n \in \mathbb{N}}$. De plus, par la proposition 3.1.1, on peut conclure que le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est fortement continu.

(iii) $(T(t))_{t \geq 0}$ a pour générateur $(A, D(A))$

Pour ce faire, nous notons $(B, D(B))$ le générateur du semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ et fixons $x \in D(A)$. On définit une suite de fonctions sur un intervalle compact $[0, t_0]$

$$\epsilon_n : [0, t_0] \rightarrow X : t \rightsquigarrow T_n(t)x$$

qui converge uniformément vers $\epsilon(\cdot)$ sur chaque intervalle $[0, t_0]$. La démonstration de cette convergence uniforme a déjà été réalisée au point (ii).

De plus, la suite de fonctions $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers η . La fonction ϵ_n est définie de la manière suivante

$$\epsilon_n : [0, t_0] \rightarrow X : t \rightsquigarrow T_n(t)A_n x.$$

Tandis que la fonction η est définie par

$$\eta : [0, t_0] \rightarrow X : t \rightsquigarrow T(t)Ax.$$

En utilisant la bornitude de la famille d'opérateurs $(T(t))_{t \geq 0}$, on obtient

$$\begin{aligned} ||\epsilon_n(t) - \eta(t)|| &= ||T_n(t)A_n(x) - T(t)Ax|| \\ &= ||T_n(t)A_n x - T_n(t)Ax + T_n(t)Ax - T(t)Ax|| \\ &\leq ||T_n(t)A_n x - T_n(t)Ax|| + ||T_n(t)Ax - T(t)Ax|| \\ &= ||T_n(t)(A_n x - Ax)|| + ||(T_n(t) - T(t))Ax|| \\ &\leq ||T_n(t)|| ||A_n x - Ax|| + ||T_n(t)Ax - T(t)Ax|| \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons que $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers η puisque $A_n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Ax$ et $T_n(t)Ax \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T(t)Ax$ par définition de $T(t)x$. Par ailleurs, nous avons également montré que ϵ_n converge uniformément vers ϵ . Dès lors, nous avons que ϵ est de classe C^1 et $\dot{\epsilon} = \eta$. En particulier, cela implique que $\dot{\epsilon}(0) = \eta(0)$. Par conséquent, nous obtenons que

$$Bx = Ax \text{ avec } x \in D(A). \quad (3.7)$$

Il nous reste à montrer que $D(A) = D(B)$. Par hypothèse, nous savons que $\lambda \in \rho(A)$ et ainsi l'opérateur $(\lambda I - A)$ est une bijection du domaine $D(A)$ vers l'ensemble X . Par ailleurs, nous avons également que $\lambda \in \rho(B)$ par le théorème 3.3.4 puisque l'opérateur B engendre un semi-groupe fortement continu.

$$\left. \begin{array}{l} (\lambda I - A) \text{ est surjectif} \\ (\lambda I - B) \text{ est surjectif} \end{array} \right\} \implies (\lambda I - A)D(A) = (\lambda I - B)D(B)$$

En appliquant la relation (3.7) à $(\lambda I - A)D(A) = (\lambda I - B)D(B)$, nous obtenons la relation suivante

$$(\lambda I - B)D(A) = (\lambda I - B)D(B)$$

sur $D(A)$. Puisque $(\lambda I - B)$ est bijectif et donc inversible, nous obtenons finalement $D(A) = D(B)$. En résumé, nous avons montré que $D(A) = D(B)$ et $Ax = Bx$ pour tout $x \in D(A)$. Or, nous avons défini le couple $(B, D(B))$ comme étant le générateur du semi-groupe de contraction fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$. Dès lors, de manière évidente, le couple $(A, D(A))$ engendre donc $(T(t))_{t \geq 0}$.

□

Le théorème de Hille-Yosida nous permet de démontrer deux théorèmes qui vont nous faciliter la vérification de génération d'un semi-groupe de contraction fortement continu par un opérateur donné.

3.5 Théorème de Lümer et Phillips

Cette nouvelle caractérisation ne requiert pas l'utilisation de l'opérateur résolvant. Pour ce faire, nous allons utiliser la notion de dissipativité d'un opérateur linéaire. Pour cette nouvelle notion, une structure d'espace de Banach n'est pas suffisante. Nous allons munir l'espace vectoriel X d'un produit scalaire qui induit lui même une norme, pour laquelle l'espace X est complet. On définit donc X comme étant un espace de Hilbert. Avant toute chose, définissons la notion de dissipativité.

Définition Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ est dit dissipatif si

$$\forall x \in D(A) \operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq 0.$$

♣

La proposition suivante nous donne une autre caractérisation possible de la dissipativité d'un opérateur.

Proposition 3.5.1

Considérons un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \rightarrow X$.

$$A \text{ est dissipatif} \iff \forall x \in D(A), \forall \lambda > 0, \|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|$$

Démonstration

Commençons par démontrer que la condition est nécessaire. Supposons que l'opérateur A soit linéaire dissipatif. Si $x = 0$, la démonstration du résultat est évidente. Sinon, soit $x \in D(A)$ fixé de manière arbitraire tel que $x \neq 0$ et $\lambda > 0$. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $x \in D(A)$ et en utilisant la linéarité du produit scalaire, nous obtenons

$$\|(\lambda I - A)x\| \|x\| \geq \operatorname{Re} \langle (\lambda I - A)x, x \rangle = \lambda \|x\|^2 - \operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle.$$

Par hypothèse, l'opérateur A est dissipatif. Par conséquent, nous avons que $-\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \geq 0$. Nous obtenons ainsi,

$$\|(\lambda I - A)x\| \|x\| \geq \lambda \|x\|^2.$$

En divisant par $\|x\| \neq 0$, nous obtenons la relation souhaitée.

Montrons que la condition est suffisante. Supposons que la relation soit vérifiée et montrons que l'opérateur linéaire A est dissipatif. Par définition, nous devons montrer que $\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq 0$ avec $x \in D(A)$ fixé de manière arbitraire. En outre, nous avons que

$$\|(\lambda I - A)x\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle + \|Ax\|^2.$$

Dès lors, par hypothèse, nous avons

$$-2\lambda \operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle + \|Ax\|^2 = \|(\lambda I - A)x\|^2 - \lambda^2 \|x\|^2 \geq 0.$$

En divisant par λ et faisant tendre λ vers l'infini, nous obtenons le résultat souhaité.

□

Lemme 3.5.2

Considérons un opérateur A fermé et dissipatif. Alors, pour tout $\lambda > 0$, $Im(\lambda I - A)$ est fermé.

Démonstration

Considérons $\lambda > 0$. Nous devons montrer que $Im(\lambda I - A) = \overline{Im(\lambda I - A)}$. En caractérisant la fermeture de l'image par des suites, nous avons qu'il existe une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Im(\lambda I - A)$ telle que $z_n \rightarrow z$ lorsque n tend vers l'infini avec $z \in \overline{Im(\lambda I - A)}$. Par définition de l'image, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A) = D(\lambda I - A)$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda I - A)x_n = z_n$. De plus, puisque par l'opérateur A est dissipatif, nous avons que

$$\|z_n - z_m\| = \|(\lambda I - A)(x_n - x_m)\| \geq \lambda \|x_n - x_m\|. \quad (3.8)$$

La suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant convergente, elle est de Cauchy. Par l'inégalité (3.8), la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est également de Cauchy. Etant contenue dans un espace complet, elle est donc convergente vers un élément $x \in D(A)$.

Utilisons l'hypothèse de fermeture de l'opérateur A . Par définition, nous obtenons l'implication suivante.

$$\left. \begin{array}{l} \forall (x_n)_n \subset D(A), \quad x_n \rightarrow x \\ \quad \quad \quad Ax_n \rightarrow y \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} x \in D(A) \\ y = Ax \end{array}$$

En outre, nous avons que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda I - A)x_n = z$. Dès lors, en utilisant l'hypothèse de fermeture de l'opérateur A , nous obtenons que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda I - A)x_n &= \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n \\ &= \lambda x - z \\ &= (\lambda I - A)x \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons que $z \in Im(\lambda I - A)$.

□

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Lümer et Phillips qui, de la même manière que le théorème de Hille et Yosida, exprime une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution au problème de Cauchy considéré en ayant recours à la notion de dissipativité d'un opérateur.

Théorème 3.5.3 (Lümer-Phillips)

Considérons un opérateur linéaire A . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

1. A est un générateur d'un semi-groupe fortement continu de contraction $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X .
2. A est dissipative et $Im(I - A) = X$.

Démonstration Nous commencerons par démontrer que 1 implique 2. Pour ce faire, supposons que l'opérateur A soit un générateur d'un semi-groupe de contraction. De plus, le théorème 3.3.2 nous permet d'affirmer que cet opérateur est également fermé et densément défini. Dès lors, nous pouvons lui appliquer le théorème de Hille et Yosida. Nous obtenons que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda} \text{ avec } \lambda > 0. \quad (3.9)$$

De plus, par 3.9 et par la définition de bornitude d'un opérateur, on obtient, pour tout z appartenant à $Im(\lambda I - A)$, que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}z\| \leq \frac{1}{\lambda} \|z\| \text{ avec } \lambda > 0. \quad (3.10)$$

Par définition de l'ensemble image, il existe un élément x dans $D(A)$ tel que $(\lambda I - A)x = z$. En remplaçant dans l'expression (3.10), nous obtenons, pour tout x appartenant à $D(A)$, que

$$\lambda \|x\| \geq \|(\lambda I - A)x\| \text{ avec } \lambda > 0.$$

Par conséquent, en particulier, nous avons que $Im(I - A) = X$ et, que pour tout x appartenant à $D(A)$,

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|, \quad \lambda > 0.$$

La proposition 3.5.1 nous permet donc de conclure que l'opérateur A est dissipatif.

Il nous reste à démontrer que 2 implique 1. Supposons que l'opérateur A soit dissipatif et que $Im(I - A) = X$. Par le théorème de Hille et Yosida, il est suffisant de montrer que l'opérateur A est densément défini et fermé. Il nous faut également montrer que $]0, \infty[\subset \rho(A)$ et que $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$ avec $\lambda > 0$.

Pour montrer que l'ensemble $D(A)$ est dense dans X , nous allons utiliser le critère de densité dans un Hilbert. Celui-ci nous permet d'affirmer que l'ensemble $D(A)$ est dense si et seulement si l'ensemble orthogonal à $D(A)$ noté $D(A)^\perp$ est réduit à l'origine. Fixons $z \in D(A)^\perp$ de manière arbitraire et montrons que $z = 0$. Par hypothèse, nous avons que $Im(I - A) = X$. De plus, par définition de l'ensemble image appliqué à $z \in X$, nous obtenons

$$\exists x \in D(A) \text{ tel que } z = (I - A)x.$$

Par ailleurs, puisque z est orthogonal à tous les éléments de l'ensemble $D(A)$, nous avons donc en particulier

$$\langle z, x \rangle = 0.$$

Donc, par la linéarité du produit scalaire nous obtenons

$$0 = \langle z, x \rangle = \langle (I - A)x, x \rangle = \langle x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle.$$

En prenant la partie réelle, nous avons

$$0 = \|x\|^2 - Re\langle Ax, x \rangle.$$

La dissipativité de l'opérateur A implique que $\|x\| = 0$. Cela étant équivalent à avoir $x = 0$, par linéarité, nous obtenons que $z = (I - A)x = 0$. Dès lors, par le critère de densité sur un Hilbert, nous avons montré que le domaine de l'opérateur A est dense dans X .

Montrons que l'opérateur $(I - A)$ est injectif. Par la linéarité de cet opérateur, cela est équivalent à montrer que $Ker(I - A) = \{0\}$. Utilisons l'hypothèse de dissipativité de l'opérateur A avec $\lambda = 1$. Par la proposition 3.5.1, nous obtenons que

$$\|(I - A)x\| \geq \|x\|. \quad (3.11)$$

Dès lors, cette relation implique que l'opérateur $(I - A)$ est injectif. Or, par hypothèse, nous savons que l'opérateur $(I - A)$ est aussi surjectif. Par conséquent, l'opérateur $(I - A)$ est bijectif et dès lors, inversible. En utilisant (3.11), nous voyons que l'opérateur inverse $(I - A)^{-1}$ est linéaire borné. En outre, l'inverse d'un opérateur borné est un opérateur fermé. Dès lors, l'opérateur $(I - A)$ est fermé.

En montrant que l'opérateur $(\lambda I - A)$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$, nous pourrions en répétant le raisonnement ci-dessus conclure par la proposition 3.5.1 que la relation de Hille et Yosida est vérifiée et, par conséquent, que A génère un semi-groupe de contraction.

Pour montrer la surjectivité, nous commençons par prouver que l'image de cet opérateur est dense. De la même façon que précédemment, nous utilisons le critère de densité sur un Hilbert. Considérons un élément z du complémentaire orthogonal de l'image de $(\lambda I - A)$ et, considérons un élément x de $D(A)$. Par linéarité du produit scalaire, nous obtenons les égalités suivantes.

$$0 = \langle z, (\lambda I - A)x \rangle = \langle (I - A)x, (\lambda I - A)x \rangle = \lambda \|x\|^2 - \lambda \langle Ax, x \rangle - \langle x, Ax \rangle + \|Ax\|^2.$$

En prenant la partie réelle, on peut écrire

$$0 = \lambda \|x\|^2 - \lambda Re\langle Ax, x \rangle - Re\langle x, Ax \rangle + \|Ax\|^2.$$

En utilisant la dissipativité de l'opérateur A , on obtient que tous les termes de droite sont positifs. Par conséquent, $x = 0$ et $z = (I - A)x = 0$. Nous avons ainsi montré la densité de l'image de l'opérateur $(\lambda I - A)$. Par le lemme 3.5.2, nous obtenons que l'image est fermée et donc, $Im(\lambda I - A)$ est égale à X .

□

Attardons-nous quelques peu sur les hypothèses des théorèmes de Hille-Yosida et de Lümer-Phillips. Nous constatons que le théorème de Hille-Yosida impose à l'opérateur A d'être fermé et densément défini alors que, le théorème de Lümer-Phillips ne l'impose pas. Cela signifie que lorsque nous souhaitons vérifier si le couple $(A, D(A))$ engendre un semi-groupe fortement continu de contraction, nous devons tester ces hypothèses de fermeture et de densité avec le théorème de Hille-Yosida.

Ces hypothèses ne sont, en fait, pas nécessaires pour le théorème de Lümer-Phillips. En effet, elles se déduisent facilement de la dissipativité de A avec la condition que $Im(I - A) = X$ (voir démonstration du théorème de Lümer-Phillips).

Le théorème suivant est une conséquence directe du théorème de Lümer et Phillips et nous donne une nouvelle caractérisation pour le générateur d'un semi-groupe. Pour cette nouvelle caractérisation, nous avons recours à l'opérateur adjoint. La définition de l'opérateur adjoint présentée ci-dessous est la définition sur un espace de Hilbert. Notons qu'il est également possible de définir l'adjoint d'un opérateur en utilisant le crochet de dualité.

Définition Considérons l'espace de Hilbert X ainsi que l'opérateur $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ densément défini. L'opérateur adjoint A^* de A est défini par :

$$\forall x \in D(A), \forall y \in D(A^*) \langle y, Ax \rangle = \langle A^*y, x \rangle$$

avec $D(A^*) = \{y \in X; \exists c \geq 0, |\langle y, Ax \rangle| \leq c|x|, x \in D(A)\}$.

♣

Théorème 3.5.4

Considérons un opérateur A linéaire, densément défini et fermé sur un espace de Hilbert X . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

1. A est un générateur d'un semi-groupe de contraction $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X .
2. A et A^* sont dissipatifs.

Démonstration

Nous allons démontrer que 1 implique 2. Supposons que A soit un générateur d'un semi-groupe de contraction $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X . Par le théorème de Lümer et Phillips, nous avons directement que l'opérateur A est dissipatif. Appliquons maintenant le théorème de Hille et Yosida, nous obtenons que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda} \text{ avec } \lambda > 0.$$

Il est connu que l'inverse de l'adjointe égale l'adjointe de l'inverse et que la norme de l'adjointe est égale à la norme de l'opérateur. Cela nous permet d'écrire les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \geq \|(\lambda I - A)^{-1}\| &= \|((\lambda I - A)^{-1})^*\| \\ &= \|((\lambda I - A)^*)^{-1}\| \\ &= \|(\lambda I - A^*)^{-1}\| \end{aligned}$$

Le même raisonnement que dans la preuve de Lümer et Phillips peut être appliqué pour prouver que pour tout $x \in D(A^*)$

$$\|(\lambda I - A^*)x\| \geq \lambda \|x\|^2.$$

Par la proposition 3.5.1, nous pouvons conclure que l'opérateur A^* est dissipatif.

Supposons maintenant que les opérateurs A et A^* soient dissipatifs. Comme l'opérateur A est fermé et dissipatif, nous pouvons appliquer le lemme 3.5.2 et obtenir que l'image de $(\lambda I - A)$ est fermée.

Nous allons maintenant montrer que l'opérateur $(\lambda I - A)$ est dense dans X . Par le critère de densité dans un espace de Hilbert, il nous suffit de démontrer que $Im((\lambda I - A))^\perp = \{0\}$. Supposons par l'absurde que $\lambda_0 > 0$ et $z \neq 0$ tel que $z \in Im((\lambda_0 I - A))^\perp$. Par orthogonalité, nous avons $\forall x \in D(A)$

$$0 = \langle z, (\lambda_0 I - A)x \rangle = \lambda_0 \langle z, x \rangle - \langle z, Ax \rangle.$$

En passant à l'opérateur adjoint, nous obtenons que

$$0 = \langle \lambda_0 z - A^* z, x \rangle.$$

Par définition de l'opérateur adjoint, nous avons que $z \in D(A^*)$ et $A^* z = \lambda_0 z$. Par hypothèse, l'opérateur A^* est dissipatif. Par conséquent, nous obtenons l'inégalité suivante

$$0 \geq Re \langle A^* z, z \rangle = \langle \lambda_0 z, z \rangle = \lambda_0 \|z\|^2$$

qui implique que $\lambda_0 \leq 0$. Cela entre en contradiction avec l'hypothèse absurde que λ_0 soit positif.

Dès lors, nous avons démontré que $Im((\lambda_0 I - A))$ est fermée et densément définie ce qui implique que $Im((\lambda_0 I - A)) = X$. En appliquant le théorème de Lümer et Philipps une nouvelle fois, nous pouvons conclure que l'opérateur A génère un semi-groupe fortement continu de contraction.

□

Chapitre 4

Problème bien posé

Dans ce chapitre, nous allons avoir recours aux différents résultats théoriques présentés dans le chapitre sur les semi-groupes pour l'obtention d'un problème bien posé dans le cadre des systèmes hamiltoniens à ports. Ce concept de problème bien posé a été énoncé par le professeur Jacques Hadamard. Avant toute chose, rappelons les conditions qu'un problème doit vérifier pour être qualifié de bien posé, voir [6].

1. Le problème doit admettre une solution.
2. Si une solution existe, elle est unique.
3. Le comportement de la solution évolue de manière continue avec les conditions initiales.

Pour y parvenir, nous caractériserons tout d'abord le couple opérateur-domaine $(A, D(A))$ pour le cas d'un système hamiltonien à ports. Ensuite, il sera question de démontrer le théorème qui nous donne une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution. Par ailleurs, ce théorème énonce également que les deux dernières conditions d'Hadamard sont vérifiées, c'est-à-dire, l'unicité et la continuité. Finalement, nous clôturerons ce chapitre en reprenant l'exemple d'une corde vibrante en lui appliquant les différents résultats obtenus.

4.1 Equation différentielle ordinaire

Dans cette section, nous allons réécrire l'EDP qui régit la dynamique d'un système hamiltonien à ports sous la forme d'une équation différentielle ordinaire au travers d'un opérateur A . En outre, nous allons également réexprimer les conditions frontières pour qu'elles soient adéquates à la caractérisation d'un générateur $(A, D(A))$ d'un semi-groupe fortement continu de contraction.

Rappelons l'équation aux dérivées partielles d'un système hamiltonien à ports.

$$\frac{\partial x}{\partial t}(\zeta, t) = P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta}(\mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t)) + P_0(\mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t)) \quad (4.1)$$

Pour pouvoir réécrire l'équation (4.1), nous allons oublier la dépendance spatiale et obtenir ainsi l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t), \quad (4.2)$$

où l'opérateur A est défini par $Ax = P_1 \frac{d}{d\zeta}(\mathcal{H}x) + P_0(\mathcal{H}x)$.

Intuitivement, la caractérisation des conditions frontières semble plus adéquate en fonction de la variable $\mathcal{H}(x)$. En effet, l'équation de variation d'énergie est exprimée en fonction de cette variable. Dès lors, considérons les conditions frontières

$$\tilde{W}_B \begin{bmatrix} \mathcal{H}(b)x(b, t) \\ \mathcal{H}(a)x(a, t) \end{bmatrix} = 0, \quad t \geq 0. \quad (4.3)$$

Par conséquent, le système hamiltonien à ports peut se reformuler sous la forme d'une équation différentielle ordinaire au moyen d'un opérateur A et de son domaine associé $D(A)$ qui s'exprime de la façon suivante

$$D(A) = \left\{ x \in X : \mathcal{H}(x) \in \mathbb{H}^1([a, b]; \mathbb{K}^n), \tilde{W}_B \begin{bmatrix} \mathcal{H}(b)x(b, t) \\ \mathcal{H}(a)x(a, t) \end{bmatrix} = 0 \right\}. \quad (4.4)$$

Comme cela a déjà été stipulé dans le chapitre 2 lorsque nous avons défini de manière formelle un système hamiltonien à ports, l'espace de phase est l'espace des fonctions de carré intégrable $\mathbb{L}^2([a, b]; \mathbb{K}^n)$. Par ailleurs, cet espace fonctionnel est muni d'une norme induite par le produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle_X = \frac{1}{2} \int_a^b g(\zeta)^* \mathcal{H}(\zeta) f(\zeta) d\zeta. \quad (4.5)$$

Bien que cette reformulation des conditions frontières en fonction de $\mathcal{H}(x)$ pris aux extrémités (ports) du système en a et en b semble adéquate, elle n'est pas le meilleur choix possible. En effet, la meilleure façon d'exprimer les conditions frontières s'effectue dans de nouvelles variables e_∂ et f_∂ .

$$e_\partial = \frac{1}{\sqrt{2}}((\mathcal{H}x)(b) + (\mathcal{H}x)(a)) \text{ et } f_\partial = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_1(\mathcal{H}x)(b) - P_1(\mathcal{H}x)(a)) \quad (4.6)$$

Le lemme suivant va nous permettre d'exprimer les variables $(\mathcal{H}x)(a)$ et $(\mathcal{H}x)(b)$ en fonction des nouvelles variables e_∂ et f_∂ . La démonstration de ce lemme ne sera pas explicitée. De manière lapidaire, elle consiste à utiliser l'hypothèse d'une matrice auto-adjointe P_1 et de quelques manipulations matricielles [voir 8, p.84].

Lemme 4.1.1

Considérons la matrice P_1 auto-adjointe et inversible définie sur le champs $\mathbb{K}^{n \times n}$, alors la matrice inversible $R_0 \in \mathbb{K}^{2n \times 2n}$ définie par

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} P_1 & -P_1 \\ I & I \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

satisfait la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} P_1 & -P_1 \\ I & I \end{bmatrix} = R_0^* \Sigma R_0, \quad (4.8)$$

où

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

En combinant (4.6) et (4.7), nous obtenons le changement de variable

$$\begin{bmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{bmatrix} = R_0 \begin{bmatrix} \mathcal{H}(b)x(b, t) \\ \mathcal{H}(a)x(a, t) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

appliqué aux conditions frontières. Puisque la matrice R_0 est inversible, nous pouvons effectivement exprimer les variables $(\mathcal{H}x)(a)$ et $(\mathcal{H}x)(b)$ en fonction des nouvelles variables e_∂ et f_∂ et obtenir une condition équivalente à la condition (4.3).

$$W_B \begin{bmatrix} f_\partial(t) \\ e_\partial(t) \end{bmatrix} = 0 \text{ avec } W_B = \tilde{W}_B R_0^{-1} \quad (4.11)$$

En outre, de par (4.6), nous trouvons la relation

$$f_\partial^* e_\partial + e_\partial^* f_\partial = ((\mathcal{H}x)(b))^* P_1 (\mathcal{H}x)(b) - ((\mathcal{H}x)(a))^* P_1 (\mathcal{H}x)(a). \quad (4.12)$$

En résumé, nous avons l'opérateur A défini comme

$$Ax := P_1 \frac{d}{d\zeta} (\mathcal{H}x) + P_0 (\mathcal{H}x) \quad (4.13)$$

avec comme domaine associé

$$D(A) = \left\{ x \in X : \mathcal{H}(x) \in \mathbb{H}^1([a, b]; \mathbb{K}^n), W_B \begin{bmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{bmatrix} = 0 \right\}. \quad (4.14)$$

4.2 Théorème de génération

Dans cette section, nous allons nous baser principalement sur la théorie présentée au chapitre 3 mais aussi sur la caractérisation de l'opérateur A et de son domaine $D(A)$ qui a été développée dans la section précédente. De la même manière que pour le chapitre 3, nous cherchons à exprimer une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution mais dans le cadre particulier des systèmes hamiltoniens à ports. Le théorème énonce une caractérisation des conditions frontières pour lesquelles l'opérateur (4.13) associé au domaine (4.14) génère un semi-groupe fortement continu de contraction. Pour y parvenir, le lemme 4.2.1 s'avère nécessaire.

Lemme 4.2.1

Considérons un espace de Hilbert noté Z muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et un opérateur coercif¹ \mathcal{P} sur l'espace Z . Nous définissons également un espace $Z_{\mathcal{P}}$ comme l'espace de Hilbert Z muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{P}} := \langle \cdot, \mathcal{P} \cdot \rangle$. Alors l'opérateur A associé au domaine $D(A)$ génère un semi-groupe fortement continu de contraction sur l'espace Z si et seulement si l'opérateur $A\mathcal{P}$ de domaine $D(A\mathcal{P}) = \{z \in Z | \mathcal{P}z \in D(A)\}$ génère un semi-groupe de contraction fortement continu sur l'espace $Z_{\mathcal{P}}$.

Démonstration

Il est tout d'abord important de noter que l'application bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{P}}$ définit un produit scalaire. Effectivement, la démonstration des différentes propriétés du produit scalaire est rendue évidente par la propriété de coercivité de l'opérateur \mathcal{P} .

Commençons par démontrer la partie nécessaire du résultat. Supposons que l'opérateur A associé au domaine $D(A)$ génère un semi-groupe fortement continu de contraction. Dès lors, par le théorème 3.5.4, nous avons que les opérateurs A et A^* sont dissipatifs.

Montrons tout d'abord que $\operatorname{Re}\langle x, A\mathcal{P}x \rangle_{\mathcal{P}} \leq 0$ avec $x \in D(A\mathcal{P})$. Cette inégalité est bien vérifiée; en effet, puisque les opérateurs \mathcal{P} et A sont respectivement auto-adjoint et dissipatif, nous obtenons

$$\operatorname{Re}\langle x, A\mathcal{P}x \rangle_{\mathcal{P}} = \operatorname{Re}\langle x, \mathcal{P}A\mathcal{P}x \rangle = \operatorname{Re}\langle \mathcal{P}x, A\mathcal{P}x \rangle \leq 0.$$

Par conséquent, l'opérateur $A\mathcal{P}$ est dissipatif. De manière évidente, l'opérateur $A\mathcal{P}$ est linéaire. De plus, il est également densément défini et fermé sur l'espace $Z_{\mathcal{P}}$.

Montrons que l'opérateur $(A\mathcal{P})^*$ est dissipatif lui-aussi. Pour ce faire, nous allons décrire l'opérateur adjoint de $A\mathcal{P}$. Considérons $z \in Z_{\mathcal{P}}$ fixé de manière arbitraire dans le domaine de l'adjointe de l'opérateur $A\mathcal{P}$. Par définition de l'espace $Z_{\mathcal{P}}$, nous obtenons qu'il existe un w appartenant à $Z_{\mathcal{P}}$ tel que

$$\langle z, A\mathcal{P}x \rangle_{\mathcal{P}} = \langle w, x \rangle_{\mathcal{P}} \quad (4.15)$$

pour tout $x \in D(A\mathcal{P})$. Par définition du produit scalaire sur $Z_{\mathcal{P}}$, l'équation (4.15) est équivalente à

$$\langle \mathcal{P}z, A\mathcal{P}x \rangle = \langle w, \mathcal{P}x \rangle. \quad (4.16)$$

Par ailleurs, nous avons que $x \in D(A\mathcal{P})$ si et seulement si $\mathcal{P}x \in D(A)$. Cela nous permet donc de réexprimer (4.16) par

$$\langle \mathcal{P}z, A\tilde{x} \rangle = \langle w, \tilde{x} \rangle \quad (4.17)$$

avec $\tilde{x} \in D(A)$. Par hypothèse, le couple $(A, D(A))$ génère un semi-groupe de contraction. Dès lors, l'opérateur A est densément défini et admet par conséquent un opérateur adjoint A^* . Dès lors, l'équation (4.17) est équivalente à avoir que $\mathcal{P}z \in D(A^*)$ et $w = A^*\mathcal{P}z$.

1. L'opérateur \mathcal{P} est dit coercif lorsqu'il est auto-adjoint et lorsque que, pour tout $\epsilon > 0$, nous avons $\mathcal{P}I > \epsilon$. La seconde condition se traduit, notamment, en terme de limite de la façon suivante :

$$\lim_{\|z\| \rightarrow \infty} \mathcal{P}z = \infty, \quad \text{avec } z \in Z.$$

De part les relations (4.15), (4.16) et (4.17), nous pouvons décrire l'opérateur adjoint de $A\mathcal{P}$ et son domaine $D((A\mathcal{P})^*)$. En effet, d'une part tout vecteur z appartient à $D((A\mathcal{P})^*)$ si et seulement si le vecteur $\mathcal{P}z$ appartient $D(A^*)$; d'autre part, nous avons que

$$(A\mathcal{P})^*z = A^*\mathcal{P}z \quad (4.18)$$

avec $z \in D((A\mathcal{P})^*)$.

En démontrant le caractère dissipatif de l'opérateur $(A\mathcal{P})^*$, nous clôturons cette preuve en utilisant le corollaire de Lümer et Philips. En utilisant la définition du produit scalaire sur $Z_{\mathcal{P}}$ et le relation en (4.18), nous obtenons que

$$Re\langle x, (A\mathcal{P})^* \rangle_{\mathcal{P}} = Re\langle x, \mathcal{P}A^*\mathcal{P}x \rangle = Re\langle \mathcal{P}x, A^*\mathcal{P}x \rangle.$$

De plus, l'opérateur A^* est dissipatif par le théorème de Lümer et Philips. Dès lors nous avons que

$$Re\langle x, (A\mathcal{P})^* \rangle_{\mathcal{P}} \leq 0$$

ce qui prouve le caractère dissipatif de l'opérateur $(A\mathcal{P})^*$. □

Nous pouvons maintenant énoncer un théorème qui formule une condition nécessaire et suffisante sur les conditions frontières afin d'assurer que le problème considéré soit bien posé. La démonstration ne sera pas explicitée. Néanmoins, le lecteur le souhaitant pourra se référer au livre [8, p.86-87].

Théorème 4.2.2

Considérons l'opérateur A défini par (4.13) associé au domaine (4.14) représentant un système hamiltonien à ports. En outre, nous supposons également que les hypothèses présentes dans la définition d'un système hamiltonien à ports sont satisfaites. Par ailleurs, on suppose que la matrice représentant les conditions frontières W_B est une matrice de dimensions $n \times 2n$ de rang n . Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.

1. Le couple $(A, D(A))$ génère un semi-groupe fortement continu de contraction sur l'espace de Hilbert X .
2. La matrice représentant les conditions frontières W_B vérifie $W_B \Sigma W_B^* \geq 0$.

4.3 Exemple

Reprenons une nouvelle fois l'exemple de la corde vibrante présenté au chapitre 2 et appliquons lui le théorème 4.2.2 pour démontrer que ce problème entre dans la catégorie des problèmes bien posés. La corde est fixée à l'extrémité gauche (en a) et aucune force n'est appliquée à l'extrémité droite (en b) ce qui donne les conditions frontières suivantes :

$$\frac{\partial w}{\partial t}(a, t) = 0, \quad (4.19)$$

$$T(b) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(b, t) = 0. \quad (4.20)$$

Rappelons que le système dynamique de la corde vibrante peut être caractérisé sous la forme d'un système hamiltonien à ports. Lorsque nous avons présenté cet exemple dans le chapitre 2, nous avons obtenu $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $P_0 = 0$, et $\mathcal{H}(\zeta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho(\zeta)} & 0 \\ 0 & T(\zeta) \end{bmatrix}$.

Commençons par décrire l'expression des variables aux conditions frontières. Par les équations en (5.11), nous obtenons d'une part

$$\begin{aligned} f_{\partial} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho(b)} & 0 \\ 0 & T(b) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \rho(b) \frac{\partial w}{\partial t}(b, t) \\ \frac{\partial w}{\partial \zeta}(b, t) \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho(a)} & 0 \\ 0 & T(a) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \rho(a) \frac{\partial w}{\partial t}(a, t) \\ \frac{\partial w}{\partial \zeta}(a, t) \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} T(b) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(b, t) - T(a) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(a, t) \\ \frac{\partial w}{\partial t}(b, t) - \frac{\partial w}{\partial t}(a, t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et d'autre part, de manière similaire, nous avons

$$e_{\partial} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial t}(b) + \frac{\partial w}{\partial t}(a) \\ T(b)\frac{\partial w}{\partial \zeta}(b) + T(a)\frac{\partial w}{\partial \zeta}(a) \end{bmatrix}.$$

De plus, les conditions frontières décrites par les équations (4.19) et (4.20) deviennent dans les variables f_{∂} et e_{∂}

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T(b)\frac{\partial w}{\partial \zeta}(b, t) \\ \frac{\partial w}{\partial t}(a, t) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{\partial}(t) \\ e_{\partial}(t) \end{bmatrix} = W_B \begin{bmatrix} f_{\partial}(t) \\ e_{\partial}(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

où nous avons posé $W_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Le lecteur pourra aisément vérifier que la matrice W_B est une matrice de rang 2 et que la condition $W_B \Sigma W_B^T = 0$ est satisfaite. A partir du théorème, nous pouvons conclure que l'opérateur associé à l'EDP (2.1) génère un semi-groupe fortement continu de contraction sur l'espace $L^2([a, b]; \mathbb{R}^2)$.

Chapitre 5

Stabilité d'un système hamiltonien à ports

Parmi les nombreux comportements asymptotiques possibles, un seul sera étudié : le comportement stable. Par comportement stable, nous entendons que la solution converge vers 0, c'est-à-dire,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

En faisant varier la topologie et la vitesse de convergence, on peut définir plusieurs concepts de stabilité allant de la stabilité faible jusqu'à la stabilité exponentielle. Toutefois, dans ce chapitre, nous nous restreindrons à étudier uniquement la stabilité exponentielle.

L'étude de la stabilité et de la stabilisation de systèmes en dimension infinie est une tâche ardue. Une des raisons est que la généralisation des résultats existants pour la dimension finie n'est pas toujours possible. Notamment, l'étude du spectre n'est en général plus suffisante pour juger de la stabilité. Néanmoins, plusieurs résultats ont pu être obtenus pour les systèmes en dimension infinie voir [5] et [16]. L'objectif de ce chapitre va être de présenter des résultats adaptés à la classe des systèmes hamiltoniens à ports. Différentes hypothèses vont être prises pour ce chapitre.

Hypothèses pour le chapitre 5 :

- La matrice $P_1 \in \mathbb{K}^{n \times n}$ est inversible et auto-adjointe.
- La matrice $P_0 \in \mathbb{K}^{n \times n}$ est hermitienne.
- L'opérateur $\mathcal{H} \in C^1([a, b]; \mathbb{K}^{n \times n})$ et la matrice $\mathcal{H}(\zeta)$ est hermitienne où $\zeta \in [a, b]$. De plus, il existe $M, m > 0$ tel que $mI \leq \mathcal{H}(\zeta) \leq MI$.

- La matrice $W_B := \begin{bmatrix} W_{B,1} \\ W_{B,2} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times 2n}$ est de rang n .
- $W_B \Sigma W_B^* \geq 0$, où $\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$.

Le lecteur notera la présence d'une hypothèse plus forte en comparaison à celles utilisées lors du chapitre 4 puisque nous supposons que \mathcal{H} soit continûment différentiable. Par ailleurs, puisque $W_B \Sigma W_B^* \geq 0$, nous avons que l'opérateur

$$Ax = P_1 \frac{d}{d\zeta}(\mathcal{H}x) + P_0(\mathcal{H}x) \quad (5.1)$$

associé au domaine

$$D(A) = \left\{ x \in L^2([a, b]; \mathbb{K}^n) : \mathcal{H}(x) \in \mathbb{H}^1([a, b]; \mathbb{K}^{n \times n}), W_B \begin{bmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{bmatrix} = 0 \right\}, \quad (5.2)$$

engendre un semi-groupe fortement continu de contraction $(T(t))_{t \geq 0}$.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Tout d'abord, nous définissons le concept de stabilité exponentielle. Ensuite, nous étudions le spectre de l'opérateur (5.1) en abordant notamment la problématique de croissance du spectre. Après quoi, nous énonçons et démontrons deux critères permettant de vérifier la stabilité exponentielle d'un système hamiltonien à ports. Finalement, nous concluons ce chapitre par l'exemple d'une corde vibrante amortie en montrant la stabilité exponentielle de ce système. Commençons par donner la définition de stabilité exponentielle.

Définition Le semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ défini sur un espace de Hilbert X est dit exponentiellement stable si il existe des constantes strictement positives M et α tel que

$$\|T(t)\| \leq M e^{-\alpha t} \text{ pour tout } t \geq 0. \quad (5.3)$$

La constante α est nommée taux de décroissance du semi-groupe. De plus, le supremum pris sur toutes les valeurs possibles de α est la marge de stabilité du semi-groupe. Mathématiquement, cela nous donne

$$m := \sup \{ \alpha \in \mathbb{R}_0^+ : \text{il existe } M_\alpha \geq 1 \text{ tel que } \|T(t)\| \leq M_\alpha e^{-\alpha t} \text{ pour tout } t \geq 0 \}. \quad (5.4)$$



Si $(T(t))_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable, alors la solution du problème de Cauchy

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0, \quad (5.5)$$

tend exponentiellement vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Cela signifie que, pour tout $t \geq 0$, pour toute solution $x(t) = T(t)x_0$, nous avons que

$$\|x(t)\| \leq M e^{-\alpha t} \|x_0\|.$$

Toutes les trajectoires d'état sont bornées par une exponentielle décroissante.

5.1 Spectre

En dimension finie, pour déterminer de la stabilité exponentielle du C_0 semi-groupe associé à un problème de Cauchy sous la forme (5.5), il suffit de calculer les valeurs propres de l'opérateur A . Si elles sont toutes à partie réelle négative, alors le système dynamique (5.5) est exponentiellement stable. Autrement, il est dit instable. Cela n'est toutefois plus aussi évident en dimension infinie. Pour mieux appréhender cette problématique, définissons la notion de borne spectrale.

Définition Considérons un opérateur A défini sur un espace de Hilbert X et $\sigma(A)$ le spectre associé à cet opérateur A . La borne spectrale de A est définie par

$$s(A) = \begin{cases} \sup\{\operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\} & , \text{ si } \sigma(A) \neq \emptyset \\ -\infty & , \text{ si } \sigma(A) = \emptyset. \end{cases}$$



Localisons le spectre de l'opérateur A . Puisque le théorème de Hille-Yosida est vérifié, nous avons que le spectre de l'opérateur A décrit en (5.1) est entièrement contenu dans la partie gauche du plan complexe, c'est-à-dire, $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_0^-$. Rappelons également la notion de borne de croissance présentée au chapitre 3.

$$w_0 := \inf \{ w \in \mathbb{R} : \text{il existe } M_w \geq 1 \text{ tel que } \|T(t)\| \leq M_w e^{wt} \text{ pour tout } t \geq 0 \}$$

Par ailleurs, à partir de la notion de borne de croissance, nous pouvons tirer une condition pour la stabilité exponentielle de l'opérateur A . En effet, $w_0 < 0$ implique que toutes les trajectoires d'états se trouvent majorées par une courbe exponentiellement décroissante.

Il est bien connu qu'en dimension finie $w_0 = s(A)$. Cependant, lorsqu'on se place dans le cas de la dimension infinie, l'égalité n'est plus toujours vérifiée. Néanmoins, par le théorème de Hille-Yosida, nous pouvons affirmer que $s(A) \leq w_0$. Cela nous amène à nous poser la question suivante : avons-nous l'égalité pour les systèmes hamiltoniens à ports ? En d'autres termes, un système hamiltonien à ports est-il un cas où l'égalité est obtenue ? Une condition suffisante pour l'obtention de cette égalité est que le système dynamique soit un système spectral de Riesz. L'idée est donc de démontrer que tout système hamiltonien à ports est un système spectral de Riesz. Cette thèse est reprise dans le théorème 5.1. Pour une bonne compréhension sur la notion de système spectral de Riesz et de la preuve du théorème 5.1, nous invitons le lecteur à consulter l'annexe A1 sur les systèmes spectraux de Riesz ainsi que les références [14, p.83-110], [15] et [16, p.37-50].

Théorème 5.1

Tout système hamiltonien à ports est un système spectral de Riesz.

Démonstration

Pour prouver qu'il s'agit d'un système spectral de Riesz, nous devons montrer que l'opérateur A engendre un C_0 semi-groupe et appartient à la classe des opérateurs spectraux de Riesz. Dès lors, démontrons que A est un opérateur spectral de Riesz. Par le théorème B.1, il est suffisant de démontrer les points suivants.

1. L'opérateur A est fermé.
2. L'ensemble des valeurs propres isolées est de la forme $\{\lambda_i\}_1^\infty$. De plus, la fermeture de l'ensemble des valeurs propres est totalement déconnectée¹. Toutes ces conditions sur le spectre de A sont vérifiées. En effet, dans [14, théorème 4.2], il est démontré que le spectre de A est uniquement composé de valeurs propres isolées de multiplicité finie tel que $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.
3. L'opérateur A admet une base de Riesz, c'est-à-dire, une base orthonormale par rapport à une norme équivalente. Dans [14, théorème 4.24 et 4.27], l'auteur définit un opérateur A_ϕ et démontre qu'il admet une base de Riesz. Par ailleurs, les vecteurs propres des opérateurs A et A_ϕ sont liés par un isomorphisme. Par conséquent, l'opérateur A admet une base de Riesz.

□

Pour finir cette section, nous attirons l'attention du lecteur sur l'exemple présenté par le professeur Le Gorrec dans son article « *Systèmes hamiltoniens à ports de dimension infinie : réduction et propriétés spectrales* ». Il y présente l'exemple d'un système hamiltonien à ports (hyperbolique) dont toutes les valeurs propres se trouvent sur l'axe imaginaire. Puisque le spectre d'un système hamiltonien à ports détermine complètement la stabilité exponentielle de celui-ci, on peut affirmer qu'il s'agit d'un système instable.

5.2 Critères de stabilité exponentielle

Lorsque nous étudions la stabilité d'un système dynamique, dans la plupart des cas, nous ne connaissons que l'expression de l'opérateur, voire de l'opérateur résolvant. Par conséquent, des critères de stabilité d'un semi-groupe C_0 basés sur son générateur sont d'autant plus souhaitables. C'est le cas des deux critères présentés dans cette section où la connaissance de l'expression du C_0 semi-groupe engendré n'est pas nécessaire. Ils sont respectivement basés sur l'expression du générateur et sur la matrice des conditions frontières W_B .

Le lemme 5.2.1 donne un moyen d'évaluer la norme L^2 d'une trajectoire d'état d'un système hamiltonien à ports. En outre, il nous sera très utile pour démontrer le théorème 5.2.2. Malgré son importance, ce lemme ne sera pas démontré. Le lecteur le souhaitant pourra se référer à [8, p.109-11].

1. L'ensemble des valeurs propres $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dit déconnecté si pour tout a, b appartenant à sa fermeture, nous avons que

$$[a, b] \not\subset \overline{\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}}.$$

Lemme 5.2.1

Soit A l'opérateur défini par (5.1) et $(T(t))_{t \geq 0}$ le C_0 semi-groupe de contraction engendré par A . Alors, il existe des constantes τ et c strictement positives telles que pour toute condition initiale $x_0 \in D(A)$ la trajectoire d'état $x(t) := T(t)x_0$ vérifie

$$\|x(\tau)\|_X^2 \leq c \int_0^\tau \|\mathcal{H}(b)x(b,t)\|^2 dt \quad \text{et} \quad (5.6)$$

$$\|x(\tau)\|_X^2 \leq c \int_0^\tau \|\mathcal{H}(a)x(a,t)\|^2 dt. \quad (5.7)$$

Théorème 5.2.2

Soit A l'opérateur défini par (5.1). Si pour une constante strictement positive k fixée l'une des conditions suivantes est satisfaite pour toute condition initiale $x_0 \in D(A)$

$$\langle Ax_0, x_0 \rangle_X + \langle x_0, Ax_0 \rangle_X \leq -k \|\mathcal{H}(b)x_0(b)\|^2 \quad (5.8)$$

$$\langle Ax_0, x_0 \rangle_X + \langle x_0, Ax_0 \rangle_X \leq -k \|\mathcal{H}(a)x_0(a)\|^2, \quad (5.9)$$

alors l'opérateur A génère un C_0 semi-groupe exponentiellement stable.

Démonstration

Le résultat sera démontré en considérant que la première inégalité (5.8) est vérifiée. Le raisonnement est en tout point identique lorsqu'on considère le port situé en a . Par le lemme 5.2.1, il existe des constantes strictement positives τ et c telles que l'inégalité (5.7) soit vérifiée. Soit $x_0 \in D(A)$ et notons $(T(t))_{t \geq 0}$ le C_0 semi-groupe engendré par A . Considérons la trajectoire $x(t) := T(t)x_0$ avec $t \geq 0$. Nous nous sommes fixés une trajectoire arbitraire. Il nous reste à montrer qu'elle est exponentiellement stable. Puisque $x_0 \in D(A)$, nous avons que $x(t) \in D(A)$ et $\dot{x}(t) = Ax(t)$ avec $t \geq 0$ par le lemme 3.3.1. En réexprimant cette équation différentielle, nous obtenons que

$$\frac{d\|x(t)\|_X^2}{dt} = \frac{d\langle x(t), x(t) \rangle_X}{dt} = \langle Ax(t), x(t) \rangle + \langle x(t), Ax(t) \rangle_X. \quad (5.10)$$

Par le théorème fondamental du calcul intégral, les équations (5.8) et (5.10) impliquent que

$$\begin{aligned} \|x(\tau)\|_X^2 - \|x(0)\|_X^2 &= \int_0^\tau \frac{d\|x(t)\|_X^2}{dt} dt \\ &\leq -k \int_0^\tau \|\mathcal{H}(b)x(b,t)\|^2 dt. \end{aligned}$$

En combinant cela avec l'inégalité (5.7), nous obtenons les inégalités suivantes :

$$\frac{-k}{c} \|x(\tau)\|_X^2 \geq -k \int_0^\tau \|\mathcal{H}(b)x(b,t)\|^2 dt \geq \|x(\tau)\|_X^2 - \|x(0)\|_X^2.$$

Dès lors, nous trouvons que $\|x(\tau)\|_X^2 \leq \frac{c}{c+k} \|x(0)\|_X^2$ et, par conséquent, le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ généré par l'opérateur A est contractant avec $\|T(t)\| < 1$. Par ailleurs, ce C_0 semi-groupe est borné sur chaque sous intervalle de $[0, \infty)$. Considérons un temps $t_0 > 1$ et notons $M := \sup_{t \in [0, t_0]} \|T(t)\|$.

Dès lors, pour $\tau > t_0$, il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $nt_0 \leq \tau < (n+1)t_0$ et nous obtenons les relations suivantes

$$\|T(\tau)\| = \|T(n)T(\tau - n)\| = \|T^n(1)T(\tau - n)\| = \|T^n(1)\| \|T(\tau - n)\| \leq M e^{-n\sigma}$$

où, $\sigma = -\ln\left(\frac{c}{c+k}\right)$. En effet, puisque d'une part, nous avons $\|T(1)\|^n \leq e^{-\sigma n}$ et, d'autre part, nous avons $\|T(\tau - n)\| \leq M$. De ce fait, nous pouvons conclure que le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable.

□

Avec ce théorème, nous avons un test simple pour juger de la stabilité d'un système hamiltonien à ports. Néanmoins, le membre de gauche des équations (5.8) et (5.9) requiert le calcul d'un produit scalaire qui n'est pas des plus évidents. L'égalité suivante peut, dans certains cas, simplifier le calcul.

$$\begin{aligned}\langle Ax, x \rangle_X + \langle x, Ax \rangle_X &= \frac{1}{2}((\mathcal{H}(b)x(b))^* P_1 \mathcal{H}(b)x(b) - (\mathcal{H}(a)x(a))^* P_1 \mathcal{H}(a)x(a)) \\ &= \frac{1}{2}(f_\partial^* e_\partial + e_\partial^* f_\partial)\end{aligned}\quad (5.11)$$

En effet, en utilisant la définition du produit scalaire (4.5), le fait que les matrices P_1 et $\mathcal{H}(\zeta)$ sont auto-adjointes et que la matrice P_0 est anti-hermitienne, nous obtenons les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}\langle Ax, x \rangle_X + \langle x, Ax \rangle_X &= \frac{1}{2} \int_a^b x^*(\zeta) \mathcal{H}(\zeta) (P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{H}(\zeta) x(\zeta) + P_0 \mathcal{H}(\zeta) x(\zeta)) d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_a^b (P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{H}(\zeta) x(\zeta) + P_0 \mathcal{H}(\zeta) x(\zeta))^* \mathcal{H}(\zeta) x(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b x^*(\zeta) \mathcal{H}(\zeta) (P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{H}(\zeta) x(\zeta) + P_0 \mathcal{H}(\zeta) x(\zeta)) d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_a^b (\frac{\partial}{\partial \zeta} x^*(\zeta) \mathcal{H}(\zeta) P_1 - x^*(\zeta) \mathcal{H}(\zeta) P_0) \mathcal{H}(\zeta) x(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{d\zeta} (x^*(\zeta) \mathcal{H}(\zeta) P_1 \mathcal{H}(\zeta) x(\zeta)) d\zeta \\ &= \frac{1}{2} [x^*(\zeta) \mathcal{H}(\zeta) P_1 \mathcal{H}(\zeta) x(\zeta)]_a^b\end{aligned}$$

Ce théorème offre également une condition intéressante pour la stabilisation de systèmes hamiltoniens à ports. En effet, l'idée serait de concevoir un contrôle assurant que les trajectoires d'états vérifient l'une des équations (5.8) ou (5.9).

Nous allons maintenant conclure la partie théorique de cette section par un dernier résultat apportant un test plus évident à vérifier en pratique. Toutefois, la condition suffisante de ce lemme ne peut être souvent appliquée.

Lemme 5.2.3

Considérons le système hamiltonien à ports décrit par les équations (5.1) et (5.2). Si $W_B \Sigma W_B^* > 0$ alors le système hamiltonien à ports est exponentiellement stable.

5.3 Exemple

Dans cette section, nous allons montrer la stabilité exponentielle d'une corde vibrante avec onde amortie. Comme décrit à la figure 5.1, la corde vibrante sera fixe en son extrémité gauche et reliée en son extrémité droite à un amortisseur.

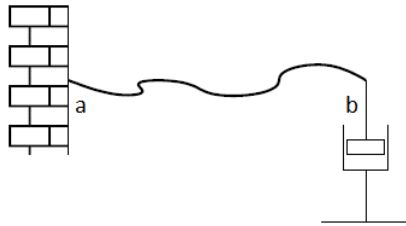


FIGURE 5.1 – Schéma d'une corde vibrante amortie

Explicitons les conditions frontières de notre problème. Commençons par exprimer la condition frontière à l'extrémité droite, c'est-à-dire, en b . Rappelons que la force $u(t)$ appliquée à l'extrémité de la corde est modélisée par

$$T(b) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(b, t) = u(t).$$

En remplaçant cette force par un amortisseur, nous obtenons

$$T(b) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(b, t) = -k \frac{\partial w}{\partial t}(b, t),$$

où k est une constante de raideur strictement positive. Explicitons maintenant la condition frontière située en a . La corde étant fixée en a , nous obtenons

$$\frac{\partial w}{\partial t}(a, t) = 0.$$

Ces conditions frontières peuvent être décrite de manière équivalente par

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T(b) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(b, t) + k \frac{\partial w}{\partial t}(b, t) \\ \frac{\partial w}{\partial t}(a, t) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & k & k & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \end{bmatrix} = W_B \begin{bmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

où la matrice $W_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & k & k & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. La matrice W_B est de rang plein. De plus, nous avons que

$$W_B \Sigma W_B^* = \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Dès lors, par le théorème 4.2.2, nous avons que l'opérateur A associé au domaine $D(A)$ engendre un semi-groupe fortement continu de contraction. Pour cet exemple, le lemme 5.2.3 n'est pas applicable. Par conséquent, pour pouvoir conclure à la stabilité exponentielle de ce système dynamique, nous allons utiliser le théorème 5.2.2.

En utilisant l'équation (5.11), nous avons

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle_X + \langle x, Ax \rangle_X &= \frac{1}{2} (f_{\partial}^* e_{\partial} + e_{\partial}^* f_{\partial}) \\ &= -k \left(\frac{\partial w}{\partial t}(b, t) \right)^2, \end{aligned} \tag{5.12}$$

où nous avons utilisé les conditions frontières. Nous remarquons qu'il n'y a aucune dépendance en l'extrémité a . Nous allons donc montrer que la première inégalité (5.8) est vérifiée. Calculons le terme de droite de l'inégalité (5.8). Nous trouvons

$$\|\mathcal{H}(b)x(b, t)\|^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial t}(b, t) \right)^2 + \left(T(b) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(b, t) \right)^2 = (k+1)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial t}(b, t) \right)^2, \tag{5.13}$$

puisque $T(b) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(b, t) = -k \frac{\partial w}{\partial t}(b, t)$. Finalement par les équations (5.12) et (5.13), nous trouvons que

$$\langle Ax, x \rangle_X + \langle x, Ax \rangle \leq -\frac{k}{1+k^2} \|\mathcal{H}(b)x(b, t)\|^2.$$

Cela nous permet de conclure qu'en attachant un amortisseur à l'une des extrémités de la corde vibrante nous stabilisons le système de manière exponentielle.

Nous concluons cet exemple en calculant l'expression des valeurs propres de l'opérateur A . En effet, dans ce chapitre, nous avons démontré que tout système hamiltonien à ports est un système spectral de Riesz (voir théorème 5.1). Cela nous permet de déduire que la borne spectrale et la

borne de croissance d'un système hamiltonien à ports coïncident. Dès lors, il est également possible d'étudier la stabilité de la corde vibrante amortie par le calcul des valeurs propres de l'opérateur

$$Ax = P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\mathcal{H}x(\zeta))$$

associé au domaine

$$D(A) = \left\{ x \in L^2([a, b]; \mathbb{R}^2) : \mathcal{H}x \in H^1([a, b]; \mathbb{R}^2), W_B \begin{bmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{bmatrix} = 0 \right\}.$$

Pour rappel, l'ensemble résolvant est constitué des points $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(A - \lambda I)$ soit inversible. Le spectre de A en est son complémentaire. Nous cherchons l'ensemble des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(A - \lambda I)$ ne soit pas inversible. Soient $f \in D(A) \setminus \{\emptyset\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$Af = \lambda f.$$

Le spectre d'un système hamiltonien à ports est discret, c'est-à-dire, entièrement composé de valeurs propres. Ce spectre est en partie déterminé par des conditions frontières. Nous devons déterminer f et λ tel que

$$P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\mathcal{H}f(\zeta)) = \lambda f, \quad (5.14)$$

$$W_B \begin{bmatrix} f_{\partial, f} \\ e_{\partial, f} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & k & k & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(\mathcal{H}f)(b) - P_1(\mathcal{H}f)(a) \\ (\mathcal{H}f)(b) + (\mathcal{H}f)(a) \end{bmatrix} = 0, \quad (5.15)$$

où nous avons pris comme notations $f_{\partial, f}$ et $e_{\partial, f}$ pour spécifier que les variables f_∂ et e_∂ sont appliqués au vecteur f .

Pour simplifier les calculs suivants, nous prenons l'hypothèse d'un module de Young T et d'une densité ρ constants. Dès lors, les égalités (5.14) et (5.15) deviennent

$$Tf'_2(\zeta) = \lambda f_1(\zeta), \quad (5.16)$$

$$\frac{1}{\rho} f'_1(\zeta) = \lambda f_2(\zeta), \quad (5.17)$$

$$f_1(a) = 0, \quad (5.18)$$

$$Tf_2(b) + \frac{k}{\rho} f_2(b) = 0. \quad (5.19)$$

En isolant f_2 dans (5.17) et en la combinant avec (5.16), nous obtenons l'équation différentielle

$$f''_1 = \frac{\rho \lambda^2}{T} f_1(\zeta).$$

La solution de cette équation s'exprime comme

$$f_1(\zeta) = h_1 e^{\sqrt{\frac{\rho}{T}} \lambda \zeta} - h_2 e^{-\sqrt{\frac{\rho}{T}} \lambda \zeta}. \quad (5.20)$$

La dérivée première de f_1 est donnée par

$$f'_1(\zeta) = h_1 \sqrt{\frac{\rho}{T}} \lambda e^{\sqrt{\frac{\rho}{T}} \lambda \zeta} + h_2 \sqrt{\frac{\rho}{T}} \lambda e^{-\sqrt{\frac{\rho}{T}} \lambda \zeta}. \quad (5.21)$$

où h_1 et h_2 sont des constantes d'intégration. Cela nous permet d'obtenir l'expression de f_2 .

$$f_2(\zeta) = h_1 \sqrt{\frac{1}{\rho T}} e^{\sqrt{\frac{\rho}{T}} \lambda \zeta} + h_2 \sqrt{\frac{1}{\rho T}} e^{-\sqrt{\frac{\rho}{T}} \lambda \zeta}. \quad (5.22)$$

Calculons les valeurs propres de l'opérateur A . Pour ce faire, nous commençons par utiliser la première condition frontière (5.18).

$$f_1(a) = h_1 e^{\sqrt{\frac{\rho}{T}} \lambda a} - h_2 e^{-\sqrt{\frac{\rho}{T}} \lambda a}$$

Nous en déduisons que

$$h_2 = e^{2\sqrt{\frac{\rho}{T}}\lambda a} h_1. \quad (5.23)$$

Remarquons que h_1 et h_2 sont des constantes non-nulles. En effet, car dans le cas contraire, cela impliquerait que $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ serait nulle ce qui est impossible puisqu'il s'agit d'un vecteur propre.

En combinant (5.22) et (5.23) avec la seconde condition frontière (5.19), nous obtenons que

$$T \left(e^{\sqrt{\frac{\rho}{T}}\lambda b} + e^{\sqrt{\frac{\rho}{T}}\lambda(2a-b)} \right) + \frac{k}{\rho} \left(e^{\sqrt{\frac{\rho}{T}}\lambda b} - e^{\sqrt{\frac{\rho}{T}}\lambda(2a-b)} \right) = 0,$$

qui se réexprime comme

$$\left(\frac{T + \frac{k}{\rho}}{T - \frac{k}{\rho}} \right) e^{2\sqrt{\frac{\rho}{T}}(b-a)\lambda} + 1 = 0.$$

L'équation d'Euler nous permet de déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, que

$$\ln \left(\frac{T\sqrt{\frac{1}{\rho T}} + \frac{k}{\rho}}{T\sqrt{\frac{1}{\rho T}} - \frac{k}{\rho}} \right) + 2\sqrt{\frac{\rho}{T}}(b-a)\lambda_n = i(2n+1)\pi$$

et, par conséquent,

$$\lambda_n = \left(-\ln \left(\frac{T + \frac{k}{\rho}}{T - \frac{k}{\rho}} \right) + i(2n+1)\pi \right) \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{\rho}(b-a)}. \quad (5.24)$$

Les vecteurs propres associés sont données par

$$f_n = \begin{pmatrix} h_1 e^{\sqrt{\frac{\rho}{T}}\lambda_n \zeta} - h_2 e^{-\sqrt{\frac{\rho}{T}}\lambda_n \zeta} \\ h_1 \sqrt{\frac{1}{\rho T}} e^{\sqrt{\frac{\rho}{T}}\lambda_n \zeta} + h_2 \sqrt{\frac{1}{\rho T}} e^{-\sqrt{\frac{\rho}{T}}\lambda_n \zeta} \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Pour garantir l'existence des valeurs propres (5.24), nous devons imposer que $T > \frac{k}{\rho}$ et que $T \neq \rho$. Les constantes d'intégration h_1 et h_2 sont fonctions des paramètres T , ρ et k .

A partir de l'expression des valeurs propres (5.24), nous pouvons établir la stabilité exponentielle du système. En effet, en calculant l'expression w_0 , nous trouvons que

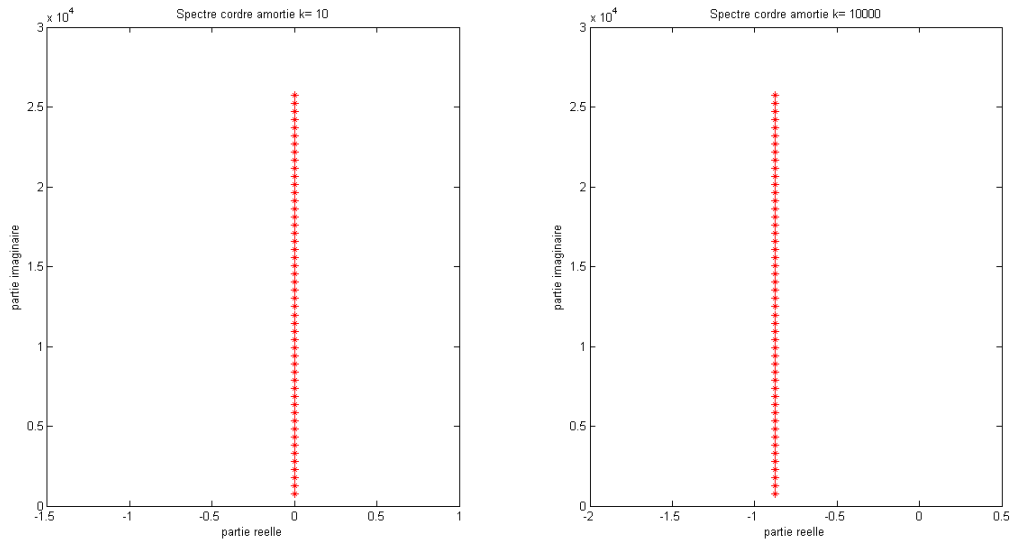
$$w_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \operatorname{Re} \lambda_n = -\frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{\rho}(b-a)} \ln \left(\frac{T\sqrt{\frac{1}{\rho T}} + \frac{k}{\rho}}{T\sqrt{\frac{1}{\rho T}} - \frac{k}{\rho}} \right) < 0,$$

ce qui entraîne la stabilité exponentielle du système.

Nous terminons cet exemple en représentant les valeurs propres de l'opérateur A dans le plan complexe à la figure 5.2. Le choix des valeurs des paramètres a , b , T , ρ et k a été pris de la manière suivante :

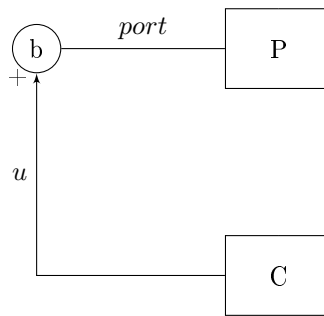
- Les constantes a et b délimitent l'intervalle spatial sur lequel nous travaillons. Nous les fixons respectivement à 0 et 10 mètres ;
- Le module de Young d'une corde en nylon est compris entre 2 et 5 *GPa*. Nous décidons de le fixer pour notre application à 3 *GPa* ;
- La densité ρ d'une corde en nylon est prise à 1240 *kg/m³* ;
- La constante de raideur k est fixée de telle sorte que les conditions d'existences des valeurs propres soient satisfaites. Nous prendrons deux valeurs 10 et 10000.

Nous calculons les 50 premières valeurs propres. A la figure 5.2, nous constatons qu'en augmentant la constante de raideur k , la partie réelle des valeurs propres diminue. Cela implique qu'en augmentant la force d'amortissement, nous accélérons la vitesse de stabilisation du système ce qui est cohérent.

FIGURE 5.2 – Représentation des valeurs propres de l'opérateur A dans le plan complexe

5.4 Contrôle par boucle de rétroaction dynamique

Nous concluons ce chapitre en présentant une méthode de stabilisation d'un système hamiltonien à ports présentée dans l'article [12]. Dans cet article, il est démontré que, sous certaines conditions, un système hamiltonien à ports (noté P) peut être stabilisé exponentiellement lorsqu'il est contrôlé aux frontières par un système dynamique de dimension finie (noté C). La sortie du système C sera prise comme entrée au système P . L'intuition est de dissiper l'énergie circulant à une des frontières du système hamiltonien à ports. Nous choisissons de connecter le système C au système P au niveau du port situé en b uniquement. L'extrémité a ne sera, quant à elle, pas reliée au système C . Nous pouvons imposer $(\mathcal{H}x)(a) = 0$. Le schéma 5.3 représente l'interconnexion des systèmes C et P .

FIGURE 5.3 – Interconnexion entre P et C

Définition Le système contrôleur est donné par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= (J_c - R_c)Q_c v + B_c u_c, \\ y_c &= B_c^T Q_c v + S_c u_c, \end{aligned} \tag{5.26}$$

où nous supposons que $Q_c = Q_c^T > 0$, $J_c = -J_c^T$, $R_c = R_c^T > 0$, $S_c = S_c^T > 0$ et B_c sont des

matrices de constantes réelles. De plus, ce système contrôleur est supposé être exponentiellement stable.



Au système (5.26), nous associons l'hamiltonien $E_c(t) = \frac{1}{2}v^T(t)Q_cv(t)$. A partir des hypothèses faites ci-dessus, nous pouvons démontrer (voir [12, p.4]) que le système (5.26) est un système dynamique ayant une entrée strictement passive, c'est-à-dire, qu'il existe une constante $\sigma > 0$ tel que

$$\dot{E}_c(t) \leq u_c(t)^T y_c(t) - \sigma \|u_c(t)\|^2.$$

Par ailleurs, une hypothèse doit également être prise sur le système hamiltonien à ports que nous souhaitons stabiliser. Nous supposons que la norme de l'énergie circulant en a est toujours inférieure à la somme des normes des entrées et des sorties. Mathématiquement, cela donne que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\|u(t)\|^2 + \|y(t)\|^2 \geq \epsilon \|\mathcal{H}x(t, b)\|. \quad (5.27)$$

L'interconnexion des deux systèmes peut être définie sur un espace d'état étendu $\tilde{X} := X \times \mathbb{R}^m$. Cet espace de Hilbert est muni du produit scalaire $\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \rangle_{\tilde{X}} = \langle x_1, x_2 \rangle_X + \langle v_1, Q_cv_2 \rangle$. De plus, nous définissons l'opérateur \tilde{A} par

$$\tilde{A}\tilde{x} = \begin{bmatrix} P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{H} + P_0 \mathcal{H} & 0 \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

avec comme domaine

$$D(\tilde{A}) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} X \\ \mathbb{R}^m \end{bmatrix} : \mathcal{H}x \in H^1([a, b]; \mathbb{K}^n), \begin{bmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \\ v \end{bmatrix} \in \text{Ker} \tilde{W}_D \right\}, \quad (5.29)$$

où $\tilde{W}_D = \begin{bmatrix} W + D_c \tilde{W} & C_c \end{bmatrix}$.

Le théorème 7.10 présenté dans [14] nous permet d'affirmer que le générateur $(\tilde{A}, D(\tilde{A}))$ engendre un semi-groupe fortement continu de contraction sur \tilde{X} . Le théorème 5.4.1 démontre la stabilisation exponentielle du système P par le système C . La preuve ne sera pas explicitée. Ce résultat provient de l'article [12, p.4-6]. Le lecteur le souhaitant pourra s'y référer.

Théorème 5.4.1

Considérons un système hamiltonien à ports tel que $\frac{d}{dt}E(t) = u(t)^T y(t)$ et vérifiant la relation (5.27). Considérons également le système dynamique (5.26) de dimension finie. Alors, le système contrôleur (5.26) stabilise le système hamiltonien à ports exponentiellement.

Chapitre 6

Système hamiltonien à ports contrôlé aux frontières

A partir de la théorie développée dans les chapitres 3 et 4, nous avons montré que tout système hamiltonien à ports peut se formuler sous la forme d'un problème de Cauchy homogène

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \in D(A). \end{cases}$$

en définissant un opérateur A et son domaine $D(A)$. De plus, en satisfaisant les conditions du théorème 4.2.2, nous obtenons un problème bien posé. La solution, quant-à-elle, se trouve sous la forme $x(t) = T(t)x_0$, où $(T(t))_{t \geq 0}$ est le semi-groupe fortement continu engendré par l'opérateur A .

Pour pouvoir considérer des problèmes de contrôle, nous devons ajouter une entrée $u(t)$ à l'équation différentielle ordinaire $\dot{x}(t) = Ax(t)$ pour obtenir l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (6.1)$$

où A et B sont des opérateurs respectivement définis sur $D(A)$ et U et, à valeurs dans l'espace d'état X . Nous considérons X comme étant un espace de Hilbert. L'espace U est défini comme l'ensemble des valeurs d'entrées et sera considéré comme un espace de Hilbert également.

En considérant ce qui a déjà été accompli, ce chapitre consisterait à montrer de quelle manière tout système hamiltonien à ports contrôlé peut s'exprimer sous la forme (6.1) en définissant un nouvel opérateur B . Toutefois, ce n'est pas le cas. En effet, tout système hamiltonien à ports contrôlé ne peut être adapté à la forme standard. Pour vous en convaincre, prenons l'exemple de l'équation de transport à laquelle on applique un contrôle, voir [8, chap.11]. Dès lors, pour remédier à ce problème, nous introduirons la notion de système dynamique contrôlé aux frontières. De plus, en prenant l'hypothèse d'une entrée $u(t)$ différentiable et en ayant recours au changement de variable $v(\zeta, t) = x(\zeta, t) - Bu(t)$, il est possible d'obtenir un système dynamique associé sous la forme standard (6.1).

Dans ce chapitre, après avoir présenté les notions de solution douce (mild solution) et classique, nous allons montrer que tout système hamiltonien à ports contrôlé est un système dynamique contrôlé aux frontières. Par la suite, nous ajouterons une sortie aux systèmes hamiltoniens à ports et nous montrerons qu'ils admettent une solution classique. Finalement, nous énoncerons l'équation d'équilibre du système hamiltonien à ports avec entrée-sortie. Le lecteur notera que les formules qui seront obtenues en dimension infinie sont similaires à celles en dimension finie.

Commençons par définir un système dynamique contrôlé aux frontières. Pour ce faire, considérons le système dynamique contrôlé sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathcal{A}x(t), x(0) = x_0, \\ \mathcal{B}x(t) &= u(t), \end{aligned} \quad (6.2)$$

où $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ est linéaire, l'entrée u appartient à l'espace des valeurs d'entrées U et l'opérateur agissant aux frontières $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subset X \rightarrow U$ est linéaire et vérifie $D(\mathcal{A}) \subset D(\mathcal{B})$. Par ailleurs, tout système dynamique contrôlé sous la forme (6.2) vérifiant deux conditions supplémentaires porte le nom de système dynamique contrôlé aux frontières.

Définition Un système dynamique contrôlé est qualifié de système dynamique contrôlé aux frontières si les conditions suivantes sont satisfaites.

1. L'opérateur $A : D(A) \rightarrow X$ avec $D(A) = D(\mathcal{A}) \cap \text{Ker}(\mathcal{B})$ et pour tout $x \in D(A)$, $Ax = \mathcal{A}x$ est le générateur d'un C_0 semi-groupe sur l'espace X noté $(T(t))_{t \geq 0}$.
2. Il existe un opérateur $B \in \mathcal{L}(U, X)$ tel que pour toute entrée u appartenant à l'espace U nous avons que $Bu \in D(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}B \in \mathcal{L}(U, X)$ et $\mathcal{B}Bu = u$.



Notons que d'une part la première condition garantit que le système (6.2) possède une solution unique lorsque nous prenons le choix de l'entrée nulle, c'est-à-dire, nous retrouvons le problème homogène bien posé. D'autre part, notons que la seconde condition implique que l'opérateur \mathcal{B} est surjectif, c'est-à-dire, que son image est égale à U . En outre, il est important de constater qu'aucune restriction n'est imposée sur la valeur prise par l'entrée $u(t)$ au temps $t \geq 0$. En effet, la seconde condition nous permet de choisir n'importe quelle valeur dans l'espace U comme entrée. Cela signifie que la définition d'un système dynamique contrôlé aux frontières n'impose pas de condition sur l'entrée $u(t), t \geq 0$.

6.1 Solutions classique et douce

Dans cette section, nous allons étudier les solutions classique et douce d'un système dynamique contrôlé aux frontières. Commençons par aborder la notion de solution la plus forte des deux, c'est-à-dire, celle dite classique. Rappelons la définition d'une solution au sens classique donnée dans le chapitre 2. Considérons un intervalle de temps $[0, \tau]$ sur lequel on définit $x : [0, \tau] \rightarrow X$ comme étant une solution classique du système dynamique contrôlé aux frontières (6.2). La fonction x est dite solution classique si x est continûment différentiable, que $x(t) \in D(\mathcal{A})$ et que $x(t)$ satisfasse (6.2) pour tout t appartenant à l'intervalle $[0, \tau]$.

Avant de nous intéresser à la solution classique d'un système dynamique contrôlé aux ports, il est utile de rappeler quelques résultats théoriques concernant les problèmes de Cauchy non-homogènes qui sont définis en toute généralité par

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \quad (6.3)$$

où nous supposons que la perturbation $f \in C([0, \tau]; X)$. Notons que dans notre cas, nous considérons comme perturbation $Bu(t)$ où l'opérateur B est linéaire borné. Nous avons donc l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (6.4)$$

Remarque Dans les résultats 6.1.1 et 6.1.2 originaux, on considère respectivement $f \in C([0, \tau]; X)$ et $f \in C^1([0, \tau]; X)$. Ici, nous nous restreindrons à supposer $u \in C([0, \tau]; X)$ et $u \in C^1([0, \tau]; X)$ puisque la composition de fonctions continues reste continu et le produit de fonctions différentiables reste différentiable.

Les démonstrations des lemmes 6.1.1 et 6.1.3 ainsi que celles des théorèmes 6.1.2 et 6.1.4 ne seront pas développées. Dès lors, nous invitons le lecteur à se référer à [8, p.128-130].

Lemme 6.1.1

Supposons que $u \in C([0, \tau]; X)$ et que $x : [0, \tau] \rightarrow X$ soit une solution classique de (6.4) sur l'intervalle $[0, \tau]$. Alors $Ax(\cdot)$ appartient à $C([0, \tau]; X)$ et nous avons que la solution classique x est définie par

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds, \quad t \in [0, \tau]. \quad (6.5)$$

Le théorème suivant affirme que sous certaines conditions, la solution classique (6.5) est également unique.

Théorème 6.1.2

Supposons que l'opérateur A soit le générateur d'un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert X , que $u \in C^1([0, \tau]; X)$ et que $x_0 \in D(A)$, alors la fonction définie par (6.5) est continûment différentiable sur l'intervalle $[0, \tau]$ et est l'unique solution classique de l'équation (6.4).

Jusqu'à présent, nous avons supposé que la perturbation $u \in C^1([0, \tau]; X)$. Cependant, cette hypothèse est trop contraignante pour l'application de contrôle. Par conséquent, dans l'objectif de relaxer cette hypothèse, nous introduisons la notion de solution douce.

Définition Si $u \in L^1([0, \tau]; X)$ et $x_0 \in X$, alors la fonction $x : [0, \tau] \rightarrow X$ définie par (6.5) est dite solution douce de (6.4) sur l'intervalle $[0, \tau]$.



La nuance entre ces deux notions de solutions tient d'une part dans la vérification de l'équation différentielle (6.4) et d'autre part dans le fait que la solution classique soit régulière. En effet, la solution classique vérifie l'équation différentielle tandis que pour la solution douce, c'est l'intégrale de celle-ci qui vérifie l'équation différentielle. Par ailleurs, notons que l'intégrale (6.5) est correctement définie au sens de Bochner. Rappelons que si $u \in L^p([0, \tau]; X)$ pour tout $p \geq 1$ alors $u \in L^1([0, \tau]; X)$. Le lemme suivant nous garantit la continuité de la solution douce.

Lemme 6.1.3

Supposons que $u \in L^1([0, \tau]; X)$ et $x_0 \in X$. La solution douce x définie par (6.5) est continue sur $[0, \tau]$.

Cependant, la théorie qui vient d'être présentée sur les équations différentielles non-homogènes ne peut être directement appliquée aux systèmes dynamiques contrôlés aux frontières. En effet, il faut d'abord reformuler cette catégorie de système dynamique sous la forme (6.3). Pour ce faire, considérons la fonction

$$v(t) = x(t) - Bu(t) \quad (6.6)$$

et reformulons l'équation (6.2) en fonction de cette fonction v pour ainsi obtenir

$$\dot{v}(t) = Av(t) - B\dot{u}(t) + \mathcal{A}Bu(t), \quad v(0) = v_0. \quad (6.7)$$

Par définition d'un système dynamique contrôlé aux frontières, nous avons que l'opérateur A est le générateur d'un C_0 semi-groupe et que les opérateurs B et $\mathcal{A}B$ sont linéaires bornés. Dès lors, en appliquant le théorème 6.1.2, nous pouvons affirmer que l'équation (6.7) possède une solution classique unique pour toute condition initiale $v_0 \in D(A)$ et entrée $u \in C^2([0, \tau]; U)$ fixées.

Le théorème suivant énonce que si la fonction x est la solution classique de l'équation (6.2) alors l'équation (6.7) a pour unique solution classique la fonction v définie en (6.6). Dès lors, ce théorème mentionne le lien existant entre les solutions classiques des deux systèmes dynamiques associés (6.1) et (6.7)

Théorème 6.1.4

Considérons le système dynamique contrôlé aux frontières et l'équation différentielle (6.7). Supposons que l'entrée $u \in C^2([0, \tau]; U)$. Si $v_0 = x_0 - Bu(0) \in D(A)$, alors les solutions classiques des équations différentielles (6.2) et (6.7) sur l'intervalle $[0, \tau]$ sont liées par la relation $v(t) = x(t) - Bu(t)$.

A présent, nous pouvons donner la solution douce de l'équation différentielle (6.7). Pour tout $v_0 \in X$ et pour tout $u \in H^1([0, \tau]; U)$ avec $\tau > 0$, nous avons que

$$v(t) = T(t)v_0 + \int_0^t T(t-s)(\mathcal{A}Bu(s) - B\dot{u}(s))ds. \quad (6.8)$$

Par conséquent, à partir de la définition de la fonction v et du lemme 6.1.1, on peut donner l'expression de la solution douce de l'équation différentielle (6.2) pour tout $x_0 \in X$ et pour tout $u \in H^1([0, \tau]; U)$ avec $\tau > 0$.

$$x(t) = T(t)(x_0 - Bu(0)) + \int_0^t T(t-s)(\mathcal{A}Bu(s) - B\dot{u}(s))ds + Bu(t) \quad (6.9)$$

6.2 Reformulation du système hamiltonien à ports

Dans cette section, nous considérons un système hamiltonien à ports auquel nous appliquons un contrôle aux ports, c'est-à-dire, aux frontières. Nous montrons qu'il appartient à la classe des systèmes dynamiques contrôlés aux frontières. Un système hamiltonien à ports contrôlé est régi par l'EDP suivante

$$\frac{\partial x}{\partial t}(\zeta, t) = P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta}(\mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t)) + P_0(\mathcal{H}(\zeta)x(\zeta, t)) \quad (6.10)$$

avec comme conditions frontières

$$u(t) = W_{B,1} \begin{bmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (6.11)$$

$$0 = W_{B,2} \begin{bmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

Reprenons l'espace d'état $X = L^2([a, b]; \mathbb{K}^{n \times n})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_X = \frac{1}{2} \int_a^b g(\zeta)^* \mathcal{H}(\zeta) f(\zeta) d\zeta. \quad (6.13)$$

De plus, nous avons les hypothèses suivantes qui proviennent d'une part de la définition d'un système hamiltonien à ports donnée lors du chapitre 2 et, d'autre part, du fait que la matrice W_B soit de rang plein.

Hypothèses 6.2 :

- La matrice $P_1 \in \mathbb{K}^{n \times n}$ est inversible et auto-adjointe.
- L'opérateur $\mathcal{H} \in L^\infty([a, b]; \mathbb{K}^{n \times n})$ et la matrice $\mathcal{H}(\zeta)$ est auto-adjointe où $\zeta \in [a, b]$. De plus, il existe $M, m > 0$ tel que $mI \leq \mathcal{H}(\zeta) \leq MI$.
- La matrice $W_B := \begin{bmatrix} W_{B,1} \\ W_{B,2} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times 2n}$ est de rang n . Les matrices $W_{B,1}$ et $W_{B,2}$ sont respectivement de dimensions $m \times 2n$ et $n - m \times 2n$.

Nous rappelons également la relation obtenue au chapitre précédent

$$\begin{bmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{bmatrix} = R_0 \begin{bmatrix} (\mathcal{H}x)(b) \\ (\mathcal{H}x)(a) \end{bmatrix},$$

où la matrice R_0 est inversible et de dimension $n \times n$. Nous pouvons maintenant reformuler notre système hamiltonien à ports sous la forme d'un système dynamique contrôlé aux frontières. En effet, puisque nous avons

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathcal{A}x(t), \quad x(0) = x_0, \\ \mathcal{B}x(t) &= u(t), \end{aligned}$$

en définissant comme opérateur \mathcal{A} et comme domaine $D(\mathcal{A})$

$$\mathcal{A}x = P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta}(\mathcal{H}x) + P_0(\mathcal{H}x), \quad (6.14)$$

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in L^2([a, b]; \mathbb{K}^n) : \mathcal{H}(x) \in \mathbb{H}^1([a, b]; \mathbb{K}^n), W_{B,2} \begin{bmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \end{bmatrix} = 0 \right\}, \quad (6.15)$$

et comme opérateur \mathcal{B} et comme domaine $D(\mathcal{B})$

$$\mathcal{B}x = W_{B,1} \begin{bmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

$$D(\mathcal{B}) = D(\mathcal{A}). \quad (6.17)$$

L'espace d'entrée U est pris égal à \mathbb{K}^m , où m est le nombre de lignes de la matrice $W_{B,1}$. Cela signifie que le nombre de lignes de la matrice $W_{B,1}$ représente le nombre d'entrées de notre système.

Pour pouvoir affirmer que tout système hamiltonien à ports est un système dynamique contrôlé aux frontières, il nous reste à montrer que les conditions 1. et 2. de la définition d'un tel système sont satisfaites. Cette thèse est reprise par le théorème 6.2.1.

Théorème 6.2.1

Si l'opérateur

$$Ax = P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta}(\mathcal{H}x) + P_0(\mathcal{H}x) \quad (6.18)$$

associé au domaine

$$D(A) = \left\{ x \in L^2([a, b]; \mathbb{K}^n) : \mathcal{H}(x) \in \mathbb{H}^1([a, b]; \mathbb{K}^n), \begin{bmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \end{bmatrix} \in \ker \begin{bmatrix} W_{B,1} \\ W_{B,2} \end{bmatrix} \right\} \quad (6.19)$$

génère un C_0 semi-groupe sur X , alors le système (6.10)-(6.11)-(6.12) est un système dynamique contrôlé aux frontières.

Démonstration

Notons tout d'abord que les équations (6.15) et (6.16) impliquent que $D(A) = D(\mathcal{A}) \cap \ker \mathcal{B}$ et donc, la première condition de la définition d'un système dynamique contrôlé aux frontières est satisfaite.

Ensuite, par hypothèse, les matrices W_B et R_0 sont respectivement de rang plein et inversible. Dès lors, il existe une matrice S de dimension $2n \times n$ tel que

$$W_B R_0 S = \begin{bmatrix} W_{B,1} \\ W_{B,2} \end{bmatrix} R_0 S = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

où I_m est la matrice identité sur \mathbb{K}^m et $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$, où S_{11} et S_{21} sont des matrices de dimensions $n \times m$. Définissons l'opérateur $B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, X)$ par

$$(Bu)(\zeta) := \mathcal{H}(\zeta)^{-1} \left(S_{11} \frac{\zeta - a}{b - a} + S_{21} \frac{b - \zeta}{b - a} \right) u.$$

De part la définition de l'opérateur B , nous pouvons déduire que Bu est une fonction de carré intégrable et que $\mathcal{H}Bu \in \mathbb{H}^1([a, b]; \mathbb{K}^n)$. De plus, en effectuant le produit matriciel (6.20), nous trouvons que $W_{B,2} R_0 \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{bmatrix} = 0$. En combinant cela avec la définition des variables de flux et d'effort, nous obtenons que $Bu \in D(\mathcal{A})$. Par ailleurs, les opérateurs B et $\mathcal{A}B$ étant linéaires bornés et en utilisant la relation (6.20), nous trouvons que

$$\mathcal{B}Bu = W_{B,1} R_0 \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{bmatrix} u = u.$$

Dès lors, nous pouvons conclure que tout système hamiltonien à ports est un système contrôlé aux frontières. □

6.3 Sorties

Jusqu'à présent, nous n'avons pas encore considéré de sortie à notre système hamiltonien à ports. Dès lors, dans cette section, nous ajoutons une sortie à notre système. Nous étudierons pour commencer les sorties d'un système dynamique de manière générale pour ensuite nous pencher sur le cas particulier d'un système hamiltonien à ports. Avant toute chose, nous supposons que l'équation de sortie soit représentée uniquement par des opérateurs bornés. Reprenons l'équation de contrôle (6.21) à laquelle nous ajoutons l'équation de sortie (6.22).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \quad (6.21)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (6.22)$$

L'opérateur A génère un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ sur l'espace d'état X , B est un opérateur linéaire borné défini sur l'espace des entrées U et à valeur dans X , C est un opérateur linéaire borné défini sur X et à valeur dans l'espace de sortie Y et D est un opérateur linéaire borné défini sur U et à valeur dans Y . Remarquons que l'équation de sortie (6.22) est composée uniquement d'opérateurs bornés. Tous les espaces U , X et Y sont présumés espaces de Hilbert.

Lors de la section précédente, à partir du lemme 6.1.1 et de la définition d'une solution dite douce, nous avons affirmé que la solution douce de l'équation (6.21) est donnée par

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds.$$

Cette solution est continue pour tout $x_0 \in X$ et pour tout $u \in L^1([0, \tau]; U)$. A partir de cette solution, nous obtenons la solution douce de l'équation de sortie

$$y(t) = CT(t)x_0 + C \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds + Du(t).$$

A présent, considérons le cas particulier d'un système hamiltonien à ports. Comme pour les entrées qui sont appliquées au niveau des ports, les observations ou sorties y sont mesurées. Dès lors, les sorties sont caractérisées de manière similaire aux entrées. Définissons les sorties d'un système hamiltonien à ports de telle manière que l'équation d'équilibre soit satisfaite en imposant certaines conditions sur ces observations. Pour résumer, un système hamiltonien à ports auquel on applique un contrôle et auquel on lit les sorties aux frontières est décrit par

$$\dot{x}(t) = P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\mathcal{H}x(t)) + P_0(\mathcal{H}x(t)), \quad (6.23)$$

$$u(t) = W_B \begin{bmatrix} f_{\partial}(t) \\ e_{\partial}(t) \end{bmatrix}, \quad (6.24)$$

$$y(t) = W_C \begin{bmatrix} f_{\partial}(t) \\ e_{\partial}(t) \end{bmatrix}, \quad (6.25)$$

où la matrice $W_C \in \mathbb{K}^{n \times 2n}$ et où nous avons pris $W_B = W_{B,1}$ ce qui indique l'utilisation du nombre maximal de contrôles possibles. De manière évidente, nous supposons également que les hypothèses 6.2 sont satisfaites. En ce qui concerne l'équation de sortie, nous supposons que toutes les observations $y(t)$ sont mesurées. En d'autres termes, nous admettons que la matrice $W_C \in \mathbb{K}^{n \times 2n}$ soit de rang plein.

A ce stade, il est important de garder à l'esprit qu'il est inutile de mesurer les entrées puisqu'elles sont supposées connues. Dès lors, nous imposons la condition que la matrice $\begin{bmatrix} W_B \\ W_C \end{bmatrix}$ soit de rang plein ou de manière équivalente qu'elle soit inversible. De plus, l'une des hypothèses 6.2 est que la matrice $\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$ soit inversible. En combinant les deux hypothèses, nous obtenons ainsi que le produit $\begin{bmatrix} W_B \\ W_C \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} W_B^* & W_C^* \end{bmatrix}$ est également inversible. Définissons son inverse par la matrice

$$P_{W_B, W_C} := \left(\begin{bmatrix} W_B \\ W_C \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} W_B^* & W_C^* \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} W_B \Sigma W_B^* & W_B \Sigma W_C^* \\ W_C \Sigma W_B^* & W_C \Sigma W_C^* \end{bmatrix}. \quad (6.26)$$

Le théorème suivant nous garantit l'existence d'une solution classique pour un système hamiltonien à ports avec entrées et sorties et, en décrit l'expression de l'équation d'équilibre.

Théorème 6.3.1

Considérons le système satisfaisant les hypothèses 6.2 et les matrices $W_C \in \mathbb{K}^{n \times 2n}$ et $\begin{bmatrix} W_B \\ W_C \end{bmatrix}$ étant respectivement de rang plein et inversible. Supposons que l'opérateur A défini par (6.18) engendre un semi-groupe fortement continu sur X avec comme domaine (6.19). Alors, pour tout $u \in C^2([0, \infty); \mathbb{K}^n)$, $\mathcal{H}x(0) \in \mathbb{H}^1([a, b]; \mathbb{K}^n)$, $u(0) = W_B \begin{bmatrix} f_\partial(0) \\ e_\partial(0) \end{bmatrix}$, le système admet une unique solution classique avec $\mathcal{H}x(t) \in \mathbb{H}^1([a, b]; \mathbb{K}^n)$ et la sortie $y(t)$ est continue. Par ailleurs, si en plus $P_0^* = -P_0$, alors l'équation d'équilibre suivante est satisfaite pour tout $t \geq 0$.

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\|_X^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u^*(t) & y^*(t) \end{bmatrix} P_{W_B, W_C} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

Démonstration

Lors de la section précédente, nous avons démontré que le système (6.23)-(6.24) est un système dynamique contrôlé aux frontières, où les opérateurs \mathcal{A} , \mathcal{B} et leurs domaines sont donnés par

$$\mathcal{A}x = P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\mathcal{H}x) + P_0 (\mathcal{H}x), \quad (6.28)$$

$$\mathcal{B}x = W_B \begin{bmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

$$D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{B}) = \left\{ x \in L^2([a, b]; \mathbb{K}^n) \mid \mathcal{H}x \in H^1([a, b]), W_{B,2} \begin{bmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{bmatrix} = 0 \right\}. \quad (6.30)$$

Considérons maintenant des opérateurs A et B tel qu'ils satisfassent les propriétés de la définition d'un système dynamique contrôlé aux frontières. Par hypothèse, nous avons que $u \in C^2([0, \infty); \mathbb{K}^n)$. Dès lors, nous avons que $x(0) - Bu(0) \in D(\mathcal{A})$. Puisque $D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{B})$, appliquons l'opérateur \mathcal{B} à $x(0) - Bu(0)$. Nous obtenons ainsi que

$$\mathcal{B}(x(0) - Bu(0)) = \mathcal{B}x(0) - \mathcal{B}Bu(0) = u(0) - u(0) = 0.$$

Cela signifie que $x(0) - Bu(0) \in \ker \mathcal{B}$. Par conséquent, nous avons que $x(0) - Bu(0) \in D(A)$ et, le théorème 6.2.1 implique alors que le système (6.23)-(6.24) possède une unique solution classique avec $\mathcal{H}x(t) \in H^1([a, b]; \mathbb{K}^n)$.

Par ailleurs, de par le théorème 2.16, il découle les égalités suivantes

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\|_X^2 = \frac{1}{2} (f_\partial^*(t) e_\partial(t) + e_\partial^*(t) f_\partial(t)) \quad (6.31)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_\partial^*(t) & e_\partial^*(t) \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} f_\partial(t) \\ e_\partial(t) \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u^*(t) & y^*(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_B^* & W_C^* \end{bmatrix}^{-1} \Sigma \begin{bmatrix} W_B \\ W_C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

ce qui conclut la démonstration. □

6.4 Exemple

Illustrons le théorème 6.3.1 par l'exemple de la corde vibrante. Dans cet exemple, nous considérons le cas où nous appliquons une force à chacune des extrémités. Ces deux forces représentent deux entrées ou contrôles notées u_1 et u_2 .

Rappelons que la dynamique d'une corde vibrante est régie par l'EDP suivante

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\zeta, t) = \frac{1}{\rho(\zeta)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(T(\zeta) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(\zeta, t) \right), \quad (6.34)$$



FIGURE 6.1 – Schéma d'une corde vibrante contrôlée

où $\zeta \in [a, b]$ et, où $w(\zeta, t)$ représente la position verticale de la corde à une position ζ au temps t . Avant toute chose, il est intéressant de reprendre les différents résultats obtenus précédemment. Tout d'abord, nous avons établi que ce système est un système hamiltonien à ports en posant $x = \begin{bmatrix} \rho \frac{\partial w}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$, $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $P_0 = 0$ et $\mathcal{H}(\zeta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho(\zeta)} & 0 \\ 0 & T(\zeta) \end{bmatrix}$. Ensuite, nous avons donné l'expression des variables e_∂ et f_∂ pour une corde vibrante comme étant

$$e_\partial = \frac{1}{\sqrt{2}}((\mathcal{H}x)(b) + (\mathcal{H}x)(a)) \text{ et } f_\partial = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_1(\mathcal{H}x)(b) - P_1(\mathcal{H}x)(a)). \quad (6.35)$$

Comme décrit à la figure 6.1, les forces aux extrémités sont les entrées tandis que les vitesses aux mêmes extrémités sont, quant-à-elle, les sorties.

$$u(t) = \begin{bmatrix} T(b) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(b, t) \\ T(a) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(a, t) \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial t}(b, t) \\ \frac{\partial w}{\partial t}(a, t) \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

Enfin, nous avons que $W_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. De plus, de façon similaire, nous trouvons que $W_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Le lecteur pourra vérifier que les matrices W_B et W_C sont de rang plein et que la matrice $\begin{bmatrix} W_B \\ W_C \end{bmatrix}$ est inversible. En outre, nous avons montré que l'opérateur A associé engendre un semi-groupe fortement continu de contraction. Par conséquent, par le théorème 6.3.1, nous pouvons assurer l'existence d'une solution classique unique avec $\mathcal{H}x(t) \in H^1([a, b]; \mathbb{K}^n)$. De plus, puisque $P_0 = 0$, l'équation d'équilibre (6.27) est satisfaite, c'est-à-dire,

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\|_X^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u^*(t) & y^*(t) \end{bmatrix} P_{W_B, W_C} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

et, en utilisant

$$W_C \Sigma W_C^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ et } W_C \Sigma W_B^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (6.39)$$

nous obtenons, finalement, que

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\|_X^2 = \frac{1}{2} (u_1^*(t)y_1(t) - u_2^*(t)y_2(t) + y_1^*(t)u_1(t) - y_2^*(t)u_2(t)). \quad (6.40)$$

Chapitre 7

Commande Optimale Linéaire-Quadratique

Depuis le début des années soixante, le problème de contrôle optimal linéaire quadratique a une place importante dans la littérature portant sur les systèmes dynamiques en dimension infinie. Dans ce chapitre, notre objectif va être la conception d'une commande optimale linéaire quadratique pour les systèmes hamiltoniens à ports. De nombreux ouvrages comme « *Linear Optimal Control* » de Anderson et Moore [1], « *An introduction to infinite dimensional linear system theory* » de Curtain et Zwart [16] donnent des résultats pour la résolution des problèmes L-Q en suivant l'optique semi-groupe. Pour la résolution de ce type de problèmes, l'étude et, dans certains cas, la résolution de l'équation de Riccati est un passage obligé. L'équation de Riccati a été l'objet de beaucoup d'attention dans la littérature. Comme certains auteurs le stipulent :

« The study of the quadratic cost problem over a finite and an infinite time interval is essentially a study of the Riccati differential equation over the finite time interval. » [2, p.33]

L'objectif de ce chapitre va être d'étudier le problème linéaire quadratique du point de vue des systèmes hamiltoniens à ports. Dans un premier temps, nous effectuons quelques rappels sur la commande optimale L-Q. Ensuite, pour pouvoir résoudre un problème de contrôle optimal L-Q, nous construisons le système différentiel étendu d'un système hamiltonien à ports. L'intérêt est que pour ces systèmes dynamiques, l'unique opérateur non-borné est celui décrivant la dynamique du système. Après quoi, nous explicitons l'équation de Riccati dans le cadre hamiltonien à ports, les conditions frontières qui lui sont associées ainsi que la fonction de coût linéaire quadratique du problème d'optimisation. Nous énonçons également certaines propriétés que vérifient l'opérateur solution de l'équation de Riccati. Finalement, nous définissons l'opérateur hamiltonien pour un système hamiltonien à ports et présentons les liens existants entre les vecteurs propres de celui-ci et la solution de Riccati. L'exemple de la corde vibrante est repris pour illustrer la construction d'une commande L-Q optimale pour un système hamiltonien à ports.

7.1 Conception d'asservissement d'état par optimisation

Dans cette section, nous effectuons une brève introduction aux problèmes L-Q. Les systèmes dynamiques que nous considérons sont de la forme suivante avec m entrées et p sorties

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \in D(A) \quad (7.1)$$

$$y(t) = Cx(t), t \geq 0, \quad (7.2)$$

où A est un opérateur fermé, densément défini sur $D(A)$ et à valeurs dans X , un espace de Hilbert. Les opérateurs B et C sont bornés respectivement définis sur \mathbb{R}^m et X et, à valeurs respectives dans X et \mathbb{R}^p . Pour la suite, la description de ce système linéaire dynamique sera notée $\Sigma(A, B, C)$.

Définissons les concepts de stabilisabilité et de détectabilité.

Définition La paire (A, B) est dite exponentiellement stabilisable si et seulement si il existe $F \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}^m)$, un opérateur linéaire borné, tel que l'opérateur $A + BF$ engendre un semi-groupe fortement continu exponentiellement stable $(T_{A+BF}(t))_{t \geq 0}$. Un tel opérateur est dit opérateur de rétroaction ou d'asservissement.



Définition La paire (C, A) est dite exponentiellement détectable si et seulement si il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, X)$, un opérateur linéaire borné, tel que l'opérateur $A + LC$ engendre un semi-groupe fortement continu exponentiellement stable $(T_{A+LC}(t))_{t \geq 0}$. Un tel opérateur est dit opérateur d'injection de sortie.



La notion de positivité d'un opérateur va également nous être utile. Au sein des opérateurs auto-adjoints, les opérateurs positifs jouent un rôle important.

Définition Un opérateur Q est dit positif si et seulement si pour tout $x \in X$, $\langle Qx, x \rangle \geq 0$.



En particulier, tout opérateur positif est auto-adjoint, possède un spectre positif et réciproquement.

La conception d'une commande optimale L-Q en horizon infini revient à résoudre un problème d'optimisation. Effectivement, pour toute condition initiale $x_0 \in X$, il nous faut trouver une entrée $u \in L^2([0, \infty[; \mathbb{R}^m)$ qui minimise la fonction de coût

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty \langle Cx(t), Cx(t) \rangle + \langle u(t), Ru(t) \rangle dt, \quad (7.3)$$

où l'opérateur C est tel que C^*C soit auto-adjoint défini positif et R un opérateur auto-adjoint semi-défini positif. Par ailleurs, il est important de noter que l'on parle de problème optimal linéaire-quadratique puisqu'il s'agit de résoudre un problème d'optimisation où la dynamique est linéaire et où la fonction de coût est quadratique.

La solution à ce problème d'optimisation peut être obtenue en déterminant un opérateur auto-adjoint positif Q qui satisfasse l'équation de Riccati

$$[A^*Q + QA + C^*C - QBB^*Q]x = 0 \quad (7.4)$$

pour tout $x \in D(A)$ et tel que $Q(D(A)) \subset D(A^*)$. Par ailleurs, puisque le domaine $D(A)$ est densément défini sur un Hilbert X , nous pouvons également exprimer l'équation de Riccati à l'aide d'un produit scalaire de la manière suivante

$$\langle y, (A^*Q + QA - QBB^* + C^*C)x \rangle_X = 0, \quad (7.5)$$

où $x, y \in D(A)$ avec $Qx \in D(A)$.

L'idée est de mettre en place un asservissement d'état en boucle fermée grâce à l'opérateur Q trouvé. En effet, on peut alors définir un opérateur de rétroaction $K = -B^*Q \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}^m)$ stabilisant le C_0 semi-groupe, $(T_{A+BK})_{t \geq 0}$, de façon exponentielle.

Abordons maintenant les questions d'existence et d'unicité d'une solution pour l'équation de Riccati. Généralement, l'opérateur auto-adjoint positif Q vérifiant l'équation de Riccati (7.4) n'est pas unique. De plus, dans certains cas, un mauvais choix d'opérateur Q peut conduire à rendre le système dynamique $\Sigma(A, B, C)$ instable, voir équation de la chaleur [16, p.287]. Néanmoins, une condition de détectabilité est suffisante pour l'obtention de l'unicité de la solution pour l'équation de Riccati. L'existence est, quant à elle, obtenue lorsque nous avons l'hypothèse de stabilisabilité du système $\Sigma(A, B, C)$. Le théorème suivant résume la méthode de résolution d'un problème linéaire quadratique. L'énoncé de ce théorème est basé sur [16, théorème 6.1.7].

Théorème 7.1.1

Si le système linéaire $\Sigma(A, B, C)$ ayant comme fonction de coût (7.3) est exponentiellement stabilisable et détectable alors, l'équation de Riccati possède une solution unique semi-définie positive $Q = Q^* \in \mathcal{L}(X)$. L'entrée minimisant la fonction de coût (7.3) est donnée par $u(t) = Kx(t)$, où l'opérateur optimal de rétroaction $K = -B^*Q \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}^m)$ stabilise le C_0 semi-groupe, $(T_{A+BK})_{t \geq 0}$, de façon exponentielle.

7.2 Construction du modèle étendu

Pour pouvoir exprimer le problème de recherche d'une commande optimale pour un système hamiltonien à ports, nous devons tout d'abord en construire le système étendu. Dans le chapitre 6, nous avons montré que tout système hamiltonien à ports peut s'exprimer sous la forme d'un système dynamique contrôlé aux frontières

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathcal{A}x(t), \quad x(0) = x_0, \\ \mathcal{B}x(t) &= u(t), \\ y(t) &= \mathcal{C}x(t),\end{aligned}\tag{7.6}$$

où les opérateurs \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} sont non-bornés. Après quoi, par le changement de variable $v(\zeta, t) = x(\zeta, t) - Bu(t)$, nous obtenons le système dynamique associé au système (7.6)

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= Av(t) - B\dot{u}(t) + \mathcal{A}Bu(t), \\ v(0) &= v_0.\end{aligned}\tag{7.7}$$

Bien que nous ayons reformulé le système hamiltonien à ports contrôlés sous la forme standard, la présence d'un terme avec la dérivée de l'entrée $u(t)$ n'est pas souhaitable. C'est pour cette raison que nous allons étendre l'espace d'état et ainsi construire le système différentiel dit étendu. L'espace d'état étendu est défini comme $X^e := U \oplus X$ en posant $x^e(t) = \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \end{pmatrix}^T$. Nous posons également $\tilde{u}(t) = \dot{u}(t)$. Dès lors, le système différentiel étendu peut être défini de la manière suivante

$$\begin{aligned}\dot{x}^e(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A}B & A \end{pmatrix} x^e(t) + \begin{pmatrix} I \\ -B \end{pmatrix} \tilde{u}(t), \\ x^e(0) &= \begin{pmatrix} (x_0^e)_1 \\ (x_0^e)_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{7.8}$$

Définissons les opérateurs $A^e := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A}B & A \end{pmatrix}$ et $B^e := \begin{pmatrix} I \\ -B \end{pmatrix}$. Le système étendu (7.8) est de la forme (7.1) souhaitée pour l'étude d'un problème L-Q puisque d'une part l'opérateur A engendre un C_0 semi-groupe sur l'espace de Hilbert X^e et d'autre part, l'opérateur $B^e \in \mathcal{L}(U, X^e)$.

Désormais, il nous faut démontrer que le système dynamique étendu est bien posé ainsi que donner les liens entre les solutions classiques des systèmes différentiels (7.6)-(7.7)-(7.8). Ces différents points sont repris dans le théorème 7.2.2. Pour la démonstration de ce résultat nous aurons besoin du lemme 7.2.1. Le lemme 7.2.1 et le théorème 7.2.2 sont respectivement tirés de [16, lemme 3.3.2 et théorème 3.3.4].

Lemme 7.2.1

Considérons deux C_0 semi-groupes sur les espaces de Hilbert X_1 et X_2 notés respectivement $(T_1(t))_{t \geq 0}$ et $(T_2(t))_{t \geq 0}$ et, ayant comme générateurs infinitésimaux respectifs A_1 et A_2 . Supposons également que $\|T_i(t)\| \leq M_i e^{w_i t}$, $i = 1, 2$ et notons D un opérateur linéaire borné défini sur X_1 et à valeur dans X_2 . Alors, l'opérateur $A := \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ D & A_2 \end{pmatrix}$ avec comme domaine associé $D(A) := D(A_1) \oplus D(A_2)$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe sur $X := X_1 \oplus X_2$ donné, pour tout $t \geq 0$, par

$$T(t) = \begin{pmatrix} T_1(t) & 0 \\ S(t) & T_2(t) \end{pmatrix},$$

où $S(t)x = \int_0^t T_2(t-s)DT_1(s)ds = (T_1 \star T_2)_D$. En outre, il existe une constante strictement positive M tel que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, où $w = \max\{w_1, w_2\}$ si $w_1 \neq w_2$ et $w > w_1$ si $w_1 = w_2$.

Remarquons que le lemme 7.2.1, nous permet de déduire l'expression du C_0 semi-groupe engendré par l'opérateur de dynamique A^e du système étendu.

Théorème 7.2.2

Si $v_0 \in D(A)$ et $u \in C^2([0, \tau]; U)$ alors le système dynamique étendu (7.8) avec comme conditions initiales $(x_0^e)_1 = u(0)$, $(x_0^e)_2 = v_0$ et avec $\tilde{u} = \dot{u}$ possède une unique solution classique $x^e(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ où, $v(t)$ est l'unique solution classique de (7.7). En outre, si $x_0 = v_0 + Bu(0)$ alors la solution classique de (7.6) est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} B & I \end{pmatrix} x^e(t) \\ &= Bu(t) - T(t)Bu(0) + T(t)x_0 \\ &\quad - \int_0^t T(t-s)B\dot{u}(s)ds + \int_0^t T(t-s)\mathcal{A}Bu(s)ds. \end{aligned}$$

Démonstration

L'idée de la démonstration est de donner l'expression de la solution douce pour ensuite, montrer que le système (7.8) admet une solution classique unique. En appliquant le lemme 7.2.1, nous trouvons que la solution douce du système (7.8) est donnée par

$$\begin{aligned} x^e(t) &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ S(t) & T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_0^e)_1 \\ (x_0^e)_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \int_0^t \begin{pmatrix} I & 0 \\ S(t-s) & T(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ -B \end{pmatrix} \tilde{u}(s)ds, \end{aligned}$$

où $S(t)x = \int_0^t T(t-s)\mathcal{A}Bxds = \int_0^t T(s)\mathcal{A}Bxds$. Notons que l'opérateur identité I est le C_0 semi-groupe engendré par un générateur infinitésimal nul. De plus, puisque $u \in C^2([0, \tau]; U)$, $\tilde{u} \in C^1([0, \tau]; U)$, et $x^e(0) \in D(A^e)$, nous pouvons affirmer, par le théorème 6.1.2, que le système dynamique étendu (7.8) possède une solution classique unique satisfaisant les relations

$$(\dot{x}^e(t))_1 = \tilde{u}(t) = \dot{u}(t) \quad (7.9)$$

et

$$(\dot{x}^e(t))_2 = \mathcal{A}B(x_e(t))_1 + A(x_e(t))_2 - B\tilde{u}(t). \quad (7.10)$$

En outre, nous avons $(x^e(t))_1 = (x_0^e)_1 + \int_0^t \tilde{u}(s)ds = u(0) + \int_0^t \dot{u}(s)ds = u(t)$. Dès lors, la relation (7.10) devient

$$(\dot{x}^e(t))_2 = \mathcal{A}Bu(t) + A((x^e(t))_2) - B\dot{u}(t). \quad (7.11)$$

En appliquant le théorème 6.1.4, nous pouvons affirmer que $(x^e(t))_2 = v(t)$ possède une solution classique unique. Puisque nous avons $x_0 = v_0 + Bu(0)$, par le changement de variable (6.6), nous obtenons que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B & I \end{pmatrix} x^e(t) &= Bu(t) + (x^e(t))_2 \\ &= Bu(t) + v(t) \\ &= x(t). \end{aligned}$$

Finalement, à partir de l'expression de solution (6.9) pour le système (6.2), nous trouvons que

$$\begin{pmatrix} B & I \end{pmatrix} x(t) = Bu(t) + T(t)x_0 - T(t)Bu(0) + \int_0^t T(t-s)B\dot{u}(s)ds + \int_0^t T(t-s)\mathcal{A}Bu(s)ds$$

ce qui conclut la démonstration. \square

Nous concluons cette section en spécifiant au lecteur que les questions de stabilisabilité et de détectabilité du système $\Sigma(A^e, B^e, C^e)$ ne seront pas discutées. Pour la suite, nous supposons le système stabilisable et détectable, ce qui nous garantit l'existence et l'unicité d'un opérateur solution de l'équation de Riccati (7.4) et d'une commande optimale u_{min} . Néanmoins, faisons tout de même remarquer qu'il n'est nécessaire de vérifier, que l'un des deux concepts en raison de la relation de dualité qui les lie. En effet, nous avons que $\Sigma(A, -, C)$ est détectable si et seulement si $\Sigma(A^*, C^*, -)$ est stabilisable.

7.3 Equation de Riccati

Dans la section précédente, nous avons construit le système étendu d'un système hamiltonien à ports. Cela était une étape obligée pour l'exprimer sous la forme (7.2) et ainsi pouvoir en étudier le problème LQ et l'équation de Riccati. Dès lors, dans cette section, nous allons nous attarder sur le problème LQ ainsi que la formulation de l'équation de Riccati pour un système hamiltonien à ports.

Un problème LQ consiste à trouver une entrée u_{min} minimisant la fonction de coût quadratique. Rappelons que nous avons l'existence et l'unicité de ce u_{min} par les hypothèses que la paire (A^e, B^e) est exponentiellement stabilisable et que la paire (C^e, A^e) est exponentiellement détectable. La fonction de coût quadratique pour un système hamiltonien à ports est donnée par

$$\begin{aligned} J(u^e, x_0^e) &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [||C^e x^e(t)||^2 + ||u^e(t)||^2] dt, \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [||\rho_1 u(t)||^2 + ||\rho_2 v(t)||^2 + ||\dot{u}(t)||^2] dt, \end{aligned} \quad (7.12)$$

où ρ_1 et ρ_2 sont des paramètres de poids définies sur \mathbb{R} et respectivement à valeurs dans \mathbb{R}_+^m et \mathbb{R}_+^n . L'équation de Riccati pour le système étendu s'exprime comme

$$(A^e)^* Q^e + Q^e A^e - Q^e B^e (B^e)^* Q^e + (C^e)^* C^e = 0 \quad (7.13)$$

avec $Q^e \in \mathcal{L}(X^e, X^e)$ un opérateur linéaire borné auto-adjoint positif. Cet opérateur se décompose sur l'espace d'état $X^e := \mathbb{R}^m \oplus L^2([a, b]; \mathbb{K}^n)$ de la manière suivante

$$Q^e = \begin{bmatrix} Q_1^e & Q_2^e \\ Q_3^e & Q_4^e \end{bmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} Q_1^e &: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \\ Q_2^e &: L^2([a, b]; \mathbb{K}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m \\ Q_3^e &: \mathbb{R}^m \rightarrow L^2([a, b]; \mathbb{K}^n) \\ Q_4^e &: L^2([a, b]; \mathbb{K}^n) \rightarrow L^2([a, b]; \mathbb{K}^n) \end{aligned}$$

avec $(Q_1^e)^* = Q_1^e$, $(Q_2^e)^* = Q_3^e$ et $(Q_4^e)^* = Q_4^e$.

Plusieurs constations peuvent être faites sur l'opérateur de Riccati. Tout d'abord, les opérateurs Q_1^e et Q_2^e sont de rang fini. Calculons les différents termes de l'équation de Riccati (7.13).

$$\begin{aligned} (A^e)^* Q^e &= \begin{bmatrix} 0 & B^* \mathcal{A}^* \\ 0 & A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^e & Q_2^e \\ Q_3^e & Q_4^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^* \mathcal{A}^* Q_3^e & B^* \mathcal{A}^* Q_4^e \\ A^* Q_3^e & A^* Q_4^e \end{bmatrix}, \\ Q^e A^e &= \begin{bmatrix} Q_1^e & Q_2^e \\ Q_3^e & Q_4^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A} B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_2^e \mathcal{A} B & Q_2^e A \\ Q_4^e \mathcal{A} B & Q_4^e A \end{bmatrix}, \\ Q^e B^e (B^e)^* Q^e &= \begin{bmatrix} Q_1^e & Q_2^e \\ Q_3^e & Q_4^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -B^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -(B^e)^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^e & Q_2^e \\ Q_3^e & Q_4^e \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (Q_1^e)^2 - Q_2^e B Q_1^e - Q_1^e (B^e)^* Q_3^e + Q_2 B B^* Q_3 & Q_1^e Q_2^e - Q_2^e B Q_2^e \\ -Q_2^e B Q_2^e - Q_1^e (B^e)^* Q_4^e + Q_2 B B^* Q_4^e & -Q_1 B^* Q_4 + Q_2 B B^* Q_4 \\ Q_3^e Q_1^e - Q_4^e B Q_1^e - Q_3^e (B^e)^* Q_3^e + Q_4^e B^e (B^e)^* Q_3^e & Q_3^e Q_2^e - Q_4^e B^e Q_2^e \\ -Q_3^e (B^e)^* Q_4^e + Q_4^e B^e (B^e)^* Q_4^e & -Q_4 B Q_2 - Q_3 B^* Q_4 + Q_4 B B^* Q_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ et pour tout $v \in L^2([a, b]; \mathbb{K}^n)$, l'équation de Riccati peut s'exprimer sous la forme du système suivant :

$$(B^* \mathcal{A}^* Q_3 + Q_2 \mathcal{A} B + Q_1^2 - Q_2 B Q_1 - Q_1 B^* Q_3 + Q_2 B B^* Q_3 + C_1^2) u = 0, \quad (7.14)$$

$$(\mathcal{B}^* \mathcal{A}^* Q_4 + Q_2 A + Q_1 Q_2 - Q_2 B Q_2 - Q_1 B^* Q_4 + Q_2 B B^* Q_4) v = 0, \quad (7.15)$$

$$(A^* Q_3 + Q_4 \mathcal{A} B + Q_3 Q_1 - Q_4 B Q_1 - Q_3 B^* Q_3 + Q_4 B B^* Q_3) u = 0, \quad (7.16)$$

$$(A^* Q_4 + Q_4 A + Q_3 Q_2 - Q_4 B Q_2 - Q_3 B^* Q_4 + Q_4 B B^* Q_4 + C_2^2) v = 0. \quad (7.17)$$

Par ailleurs, puisque nous avons que $Q_2 = Q_3^*$, le système (7.14)-(7.15)-(7.16)-(7.17) devient

$$(B^* \mathcal{A}^* Q_3 + Q_3^* \mathcal{A} B + Q_1^2 - Q_2 B Q_1 - Q_1 B^* Q_3 + Q_3^* B B^* Q_3 + C_1^2) u = 0, \quad (7.18)$$

$$(\mathcal{B}^* \mathcal{A}^* Q_4 + Q_3^* A + Q_1 Q_3^* - Q_3^* B Q_3^* - Q_1 B^* Q_4 + Q_3^* B B^* Q_4) v = 0, \quad (7.19)$$

$$(A^* Q_3 + Q_4 \mathcal{A} B + Q_3 Q_1 - Q_4 B Q_1 - Q_3 B^* Q_3 + Q_4 B B^* Q_3) u = 0, \quad (7.20)$$

$$(A^* Q_4 + Q_4 A + Q_3 Q_3^* - Q_4 B Q_3^* - Q_3 B^* Q_4 + Q_4 B B^* Q_4 + C_2^2) v = 0. \quad (7.21)$$

Le lecteur trouvera le calcul des adjoints de A et de B respectivement aux annexes 7.51 et 7.52. Nous pouvons maintenant caractériser les conditions frontières associées à ce système. L'opérateur de Riccati doit vérifier la relation $Q^e(D(A^e)) \subset D((A^e)^*)$. Cela signifie que pour tout $x^e \in D(A^e)$, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} u(t) &\in \mathbb{R}^m, \\ \mathcal{H}v(t) &\in H^1([a, b]; \mathbb{K}^n), \\ W_B \begin{bmatrix} \mathcal{H}(b)v(b, t) \\ \mathcal{H}(a)v(a, t) \end{bmatrix} &= 0, \end{aligned}$$

nous avons que

$$\tilde{W}_B^*(\Sigma R_0 \Sigma) \begin{bmatrix} \mathcal{H}(Q_3 u + Q_4 v) \\ \mathcal{H}(Q_3 u + Q_4 v) \end{bmatrix} = 0.$$

7.4 Propriétés de l'opérateur de Riccati

Dans cette section, nous allons étudier les propriétés de l'opérateur de Riccati pour un système hamiltonien à ports : structure du noyau et propriété de Hilbert-Schmidt. La théorie présentée est basée sur celle déjà existante pour tout système de dimension infinie, voir [9]. Nous l'avons adaptée à notre classe de système.

La structure spectrale de A jouant un rôle majeur, il semble pertinent d'effectuer quelques rappels quant au spectre d'un système hamiltonien à ports. Premièrement, le spectre $\sigma(A)$ est entièrement composé de valeurs propres, c'est-à-dire, que nous avons $\sigma(A) = \sigma_p(A)$. Deuxièmement, puisque l'opérateur A engendre un semi-groupe fortement continu, nous pouvons affirmer que le spectre $\sigma(A)$ est inclus dans la partie gauche du plan complexe. En effet, considérons une valeur propre $\lambda \in \sigma(A)$ et, en appliquant le théorème de Lümer-Philipps, nous obtenons

$$\operatorname{Re} \langle \lambda x, x \rangle = \operatorname{Re} \lambda \langle x, x \rangle = \operatorname{Re} \lambda \|x\|^2 \leq 0,$$

ce qui implique que $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$.

Avant toute chose, il nous faut effectuer la décomposition spectrale de notre système étendu en 0 pour ainsi pouvoir exprimer les propriétés de l'opérateur de Riccati. Notons, tout d'abord, que le spectre $\sigma(A^e)$ est égal à $\sigma(A)$ et est intégralement contenu dans \mathbb{C}^- . Dès lors, la décomposition s'effectuera sur $\sigma(A)$ où $\sigma_0^+(A) = \{s \in \sigma(A) : \operatorname{Re} s = 0\}$ et $\sigma_0^-(A) = \{s \in \sigma(A) : \operatorname{Re} s < 0\}$. Ensuite, l'opérateur A^e satisfait l'hypothèse de décomposition spectrale en 0, c'est-à-dire, $\sigma_0^+(A^e)$ est borné et séparé de $\sigma_0^-(A^e)$ de tel façon qu'une courbe fermée γ_0 peut être tracée telle qu'elle enferme un ouvert contenant $\sigma_0^-(A)$ en son extérieur. En effet, puisque son spectre est uniquement composé de valeurs propres, nous prendrons l'hypothèse qu'un nombre fini d'entre elles se situe dans $\sigma_0^+(A)$.

Hypothèse Le spectre $\sigma(A)$ possède un nombre fini de valeurs propres purement imaginaires.

L'hypothèse de décomposition spectrale induit une décomposition naturelle de l'espace d'état étendu X^e donnée par

$$X^e := X_0^e \dot{+} X_-^e = \Pi(X^e) + (I - \Pi)(X^e),$$

où $\Pi \in \mathcal{L}(X^e)$ est l'opérateur de projection défini pour tout $x^e \in X^e$ comme

$$\Pi x^e = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} (\lambda I - A)^{-1} x^e d\lambda. \quad (7.22)$$

De façon similaire, nous pouvons décomposer les opérateurs A^e , B^e et C^e comme

$$A^e = \text{diag}[A_0^e, A_-^e], B^e = \begin{bmatrix} B_0^e \\ B_-^e \end{bmatrix} \text{ et } C^e = \begin{bmatrix} C_0^e & C_-^e \end{bmatrix}.$$

Les opérateurs A_0^e et A_-^e sont respectivement les restrictions de l'opérateur A aux espaces X_0^e et X_-^e . Les opérateurs B_0^e , B_-^e , C_0^e et C_-^e sont définis par

$$\begin{aligned} B_0^e &:= \Pi B^e, \\ B_-^e &:= (I - \Pi) B^e, \\ C_0^e &:= C^e \Pi, \\ C_-^e &:= C^e (I - \Pi). \end{aligned}$$

En outre, le C_0 semi-groupe engendré par A^e et noté $(S(t))_{t \geq 0}$ se décompose pour tout $t \geq 0$ comme

$$S(t) = \text{diag} \begin{bmatrix} S_0(t) & S_-(t) \end{bmatrix}.$$

Définissons les sous-espaces critique et stable.

Définition Les sous-espaces $\mathcal{L}^0(A^e)$ et $\mathcal{L}^-(A^e)$ sont respectivement engendrés par les vecteurs propres associés aux valeurs propres de A^e dans $\sigma_0^+(A)$ et $\sigma_0^-(A)$. Ils sont respectivement dits sous-espaces critique et stable de X^e .

♣

Définissons également les sous-espaces inobservable et indétectable pour notre système hamiltonien à ports.

Définition Le sous-espace inobservable $NO(C^e, A^e)$ est défini comme

$$NO(C^e, A^e) = \{x_0^e \in X^e : C^e S(t)x_0^e = 0 \text{ pour tout } t \geq 0\},$$

où $(S(t))_{t \geq 0}$ est le C_0 semi-groupe généré par l'opérateur A^e .

♣

Définition Le sous-espace indétectable $ND(C^e, A^e)$ est défini comme

$$ND(C^e, A^e) = NO(C^e, A^e) \cap \mathcal{L}^0(A^e).$$

♣

Dans le théorème suivant, nous caractérisons le noyau de l'opérateur Q^e et en énonçons le caractère de Hilbert-Schmidt. Tout lecteur non familier avec la notion d'opérateur de Hilbert-Schmidt est invité à consulter [3, p.169].

Théorème 7.4.1

Supposons que la paire (A^e, B^e) soit exponentiellement stabilisable et que la paire (C^e, A^e) soit exponentiellement détectable. Considérons Q^e comme étant l'opérateur auto-adjoint positif satisfaisant l'équation de Riccati (7.4) et considérons $A^e - B^e(B^e)^*Q^e$ comme étant l'opérateur de dynamique du système en boucle fermé. Alors,

- (i) $\text{Ker } Q^e = ND(C^e, A^e) = \{0\}$.
- (ii) Il existe une base orthonormale $\{e_i\}_{i \in I}$ de X^e telle que

$$\|Q^e\|_{\text{H-S}}^2 := \sum \|Q^e e_i\|_{X^e}^2 < \infty. \quad (7.23)$$

Par le théorème 7.4.1, nous pouvons affirmer que le noyau de l'opérateur de Riccati d'un système hamiltonien à ports est réduit à l'origine. Dès lors, il doit nécessairement être injectif et son adjoint surjectif. Nous pouvons en conclure que l'opérateur de Riccati est bijectif. De plus, un noyau réduit à l'origine nous permet de déduire les relations suivantes pour tout $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et pour tout $v(t) \in L^2([a, b]; \mathbb{K}^n)$:

$$\begin{aligned} Q_1 u(t) + Q_2 v(t) &= 0, \\ Q_3 u(t) + Q_4 v(t) &= 0. \end{aligned}$$

La relation (7.23) signifie que lorsque i devient grand, le vecteur $Q^e e_i$ devient petit en norme de telle sorte que la série des normes converge. L'opérateur étant de Hilbert-Schmidt sur $\mathbb{R}^m \oplus L^2([a, b]; \mathbb{K}^n)$, il possède donc des propriétés spectrales intéressantes.

Il est bien connu qu'en dimension finie tout opérateur auto-adjoint sur \mathbb{C}^n est diagonalisable. Ce résultat est généralisable en dimension infinie. Pour ce faire, il suffit d'ajouter l'hypothèse d'un opérateur de Hilbert-Schmidt. Appliquons, le théorème de diagonalisation à notre opérateur Q^e . Considérons la famille infinie dénombrable des vecteurs propres $(\phi_n)_{n \in D}$ de Q^e telle que si λ_n est la valeur propre associée à ϕ_n , nous avons pour tout $x^e \in X^e$, que

$$Q^e x^e = \sum \lambda_n \langle x^e, \phi_n \rangle \phi_n. \quad (7.24)$$

De plus, on a que $\sum \lambda_n < \infty$.

Remarque : Comme l'opérateur Q^e est auto-adjoint, toutes ses valeurs propres sont réelles.

7.5 Opérateur hamiltonien

Dans cette section, nous allons étudier les liens existants entre l'opérateur Q^e , solution de l'équation de Riccati, et les vecteurs propres de l'opérateur hamiltonien H .

Lors de la section 7.3, nous avons présenté l'équation de Riccati qui consiste en une équation du second ordre qu'il nous faut résoudre. L'intérêt premier de l'opérateur hamiltonien est qu'il permet d'exprimer l'équation de Riccati sous la forme de deux équations du premier ordre.

Dans un premier temps, nous définissons la notion d'opérateur hamiltonien et nous l'explicitons dans le cas hamiltonien à ports. Dans un deuxième temps, nous discutons sur la propriété spectrale de Riesz pour cet opérateur. Dans un dernier temps, nous exprimons l'opérateur de Riccati au travers les vecteurs propres de H .

Commençons par définir l'opérateur hamiltonien du système étendu $\Sigma(A^e, B^e, C^e)$.

Définition L'opérateur hamiltonien du système $\Sigma(A^e, B^e, C^e)$ sur l'espace de Hilbert $X^e \oplus X^e$ avec comme domaine $D(H) = D(A^e) \oplus D((A^e)^*)$ est défini comme

$$H = \begin{pmatrix} A^e & -B^e(B^e)^* \\ -C^e(C^e)^* & -A^e \end{pmatrix}. \quad (7.25)$$

♣

Rappelons que, pour notre système hamiltonien à ports, les points suivants sont vérifiés.

1. L'espace de Hilbert $X^e := \mathbb{R}^m \oplus L^2([a, b]; \mathbb{K}^n)$ est séparable.
2. L'opérateur $A^e : D(A^e) \subset X^e \rightarrow X^e$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert X^e .
3. Le spectre de l'opérateur A^e est uniquement composé de valeurs propres purement imaginaires et isolées.

4. Les paires (A^e, B^e) et (C^e, A^e) sont respectivement exponentiellement stabilisable et détectable ce qui implique l'existence d'une solution unique $Q^e \in \mathcal{L}(X^e)$. L'entrée minimisant la fonction de coût (7.12) est donnée par $u(t) = Kx(t)$, où l'opérateur optimal de rétroaction $K = -(B^e)^*Q^e \in \mathcal{L}(X^e, \mathbb{R}^m)$ stabilise le C_0 semi-groupe $(T_{A^e - B^e(B^e)^*Q^e})_{t \geq 0}$, de façon exponentielle.

Dans l'article [18], plusieurs conditions suffisantes sur l'opérateur A^e sont présentées pour garantir le caractère spectral de Riesz. Néanmoins, ces conditions nécessitent la connaissance des valeurs propres de l'opérateur A que nous ne connaissons pas. Pour la suite, nous faisons l'hypothèse suivante.

Hypothèse Supposons que l'opérateur hamiltonien d'un système hamiltonien à ports soit un opérateur spectral de Riesz.

L'expression de l'opérateur hamiltonien H d'un système hamiltonien à ports est donnée par

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & -B^* \\ \mathcal{A}B & A & -B & BB^* \\ -\rho_1^2 & 0 & 0 & -B^*\mathcal{A}^* \\ 0 & -\rho_2^2 & 0 & A \end{pmatrix}. \quad (7.26)$$

Les résultats qui suivent découlent de la théorie présentée par Keiper et Zwart dans [18]. Néanmoins, la vision que nous avons est différente puisque nous supposons qu'il existe un opérateur de Riccati unique que nous caractérisons aux travers des valeurs et vecteurs propres de l'opérateur H .

Intéressons nous aux vecteurs propres de l'opérateur H . Le lemme 7.5.1 en présente la structure spectrale. La démonstration ne sera pas explicitée. Nous invitons le lecteur à se référer à [18, lemme 5.5].

Lemme 7.5.1

Considérons l'opérateur hamiltonien H donné par l'équation (7.26). Si l'opérateur hamiltonien est un opérateur spectral de Riesz et si l'opérateur $Q^e \in \mathcal{L}(X^e)$ est l'unique solution de l'équation de Riccati, alors nous avons

$$\sigma(H) = \sigma(A^e - B^e(B^e)^*Q^e) \cup \sigma(-(A^e - B^e(B^e)^*Q^e)^*).$$

Notons que l'expression du spectre de l'opérateur hamiltonien comprend les valeurs propres du système en boucle fermée. Le calcul et la représentation de ces valeurs propres est une manière de pouvoir juger de l'effet du contrôle appliqué sur celles-ci.

Considérons $\{\phi_n = \begin{pmatrix} \eta_n \\ \xi_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}_0\}$ une base de Riesz sur l'espace $X^e \oplus X^e$. Supposons qu'il existe un index $J \subset \mathbb{Z}_0$ construit de tel sorte que $\{\eta_n, n \in J\}$ soit une base de Riesz. En outre, puisque l'opérateur Q^e est solution de l'équation de Riccati, l'existence d'un tel index est garantie, voir [18, théorème 5.6]. L'expression est définie comme

$$J = \{n \in \mathbb{Z}_0 \mid \lambda_n \in \sigma_p(H) \text{ et } \lambda_n \text{ est une valeur propre de } A^e - B^e(B^e)^*Q^e\}.$$

Notons que J est aussi égale à $\{n \in \mathbb{Z}_0 \mid Q^e\eta_n = \xi_n\}$. Définissons maintenant l'index J^- comme

$$J^- = \{n \in \mathbb{Z}_0 \mid \lambda_n \in \sigma_p(H) \text{ et } \operatorname{Re}(\lambda) < 0\}.$$

Dans le théorème suivant, nous énonçons sous quelles conditions nous avons l'égalité entre les index J et J^- .

Théorème 7.5.2

Supposons que l'opérateur H soit un opérateur spectral de Riesz. Si $Q^e \in \mathcal{L}(X^e)$ est une solution stabilisante de l'équation de Riccati alors, nous avons

$$\begin{aligned} J^- &:= \{n \in \mathbb{Z}_0 \mid \lambda_n \in \sigma_p(H) \text{ et } \operatorname{Re}(\lambda_n) < 0\}, \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_0 \mid Q^e\eta_n = \xi_n\}, \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_0 \mid \lambda_n \in \sigma_p(H) \text{ est une valeur propre de } A^e - B^e(B^e)^*Q^e\}, \end{aligned}$$

et $\{\eta_n, n \in J^-\}$ est une base de Riesz sur X^e .

Démonstration

La démonstration se décompose en deux parties. L'idée est de montrer l'inclusion dans les deux sens des indexes J et J^- .

1. Montrons que $J \subset J^-$. Soit $\lambda_i \in \sigma_p(H)$ une valeur propre de $A^e + B^e(B^e)^*Q^e$. L'inclusion est obtenue de manière évidente puisque $\sigma(A^e + B^e(B^e)^*) \subset \mathbb{C}_0^-$. Dès lors, nous avons que $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$.
2. Montrons maintenant que $J^- \subset J$ par contradiction. Soit $\lambda_i \in \sigma_p(H)$ dont $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ et, supposons que λ_i n'est pas une valeur propre de $A^e + B^e(B^e)^*$. Or par le lemme 7.5.1, nous avons que $\sigma(H) = \sigma(A^e + B^e(B^e)^*) \cup \sigma(-(A^e + B^e(B^e)^*)^*)$. Dès lors, λ_i doit être une valeur propre de l'opérateur $-(A^e + B^e(B^e)^*)^*$. De plus, puisque $\sigma(-(A^e + B^e(B^e)^*)^*) = \overline{-\sigma(A^e + B^e(B^e)^*)}$, nous pouvons conclure que $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$, ce qui conduit à une contradiction.

□

Ce résultat implique que l'expression de l'index J ne dépende pas de la solution de l'équation de Riccati. Intéressons nous maintenant aux vecteurs et valeurs propres de l'opérateur H . Considérons λ_i comme étant une valeur propre de $A - B^e(B^e)^*$ associée au vecteur propre e_i . Cela signifie que

$$(A^e - B^e(B^e)^*Q^e)e_i = \lambda_i e_i.$$

De plus, nous savons que l'opérateur Q^e satisfait (7.13). Dès lors, nous avons que

$$((A^e)^*Q^e + Q^e A^e + (C^e)^2 - Q^e B^e(B^e)^*Q^e)e_i = 0.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & I & -B^* \\ \mathcal{A}B & A & -B & BB^* \\ -\rho_1^2 & 0 & 0 & -B^*\mathcal{A} \\ 0 & -\rho_2^2 & 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{i,u} \\ e_{i,L} \\ Q_1^e e_{i,u} \\ Q_4^e e_{i,L} \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} e_{i,u} \\ e_{i,L} \\ Q_1^e e_{i,u} \\ Q_4^e e_{i,L} \end{pmatrix}, \quad (7.27)$$

où les composantes $e_{i,u}$ et $e_{i,L}$ du vecteur propre de l'opérateur $(A^e - B^e(B^e)^*Q^e)$ appartiennent respectivement à \mathbb{R} et $L^2([a, b], \mathbb{K}^2)$. Notons que nous retrouvons l'opérateur hamiltonien H . Le théorème suivant décrit une méthode de construction d'une solution stabilisante Q^e qui satisfait l'équation de Riccati.

Théorème 7.5.3

Supposons que les hypothèses soient satisfaites. Si $Q^e \in \mathcal{L}(X^e)$ est une solution stabilisante de l'équation de Riccati alors, l'opérateur Q^e est donné, pour tout $n \in J^-$ par

$$Q^e \eta_n = \xi_n, \quad (7.28)$$

où $J^- = \{n \in \mathbb{Z}_0 \mid \lambda_n \in \sigma_p(H) \text{ et } \operatorname{Re}(\lambda_n) < 0\}$. De plus, $\{\eta_n, n \in J^-\}$ est une base de Riesz sur X^e .

Appliquons le théorème 7.5.3 au vecteurs propres de H . Les hypothèses sont vérifiées puisque d'une part toute base orthonormale est une base de Riesz et que l'opérateur Q^e est un isomorphisme. Nous obtenons les égalités suivantes :

$$Q_1^2 e_{i,u} + Q_2 Q_4 e_{i,L} = e_{i,u}, \quad (7.29)$$

$$Q_3 Q_1 e_{i,u} + Q_4^2 e_{i,L} = e_{i,L}. \quad (7.30)$$

7.6 Méthode

Dans cette section, nous résumons la méthodologie à mettre en place pour déterminer l'expression de l'opérateur de Riccati d'un système hamiltonien à ports au travers les vecteurs propres de l'opérateur hamiltonien associé au système.

1. Déterminer l'expression des valeurs propres de l'opérateur de dynamique A^e et leurs vecteurs propres associés.
2. Vérifier que l'opérateur hamiltonien H du système hamiltonien à ports étudié est un opérateur spectral de Riesz.
3. Déterminer l'expression des valeurs propres de l'opérateur hamiltonien H et leurs vecteurs propres associés.
4. Déterminer l'expression de J^- et vérifier si l'ensemble des vecteurs $\{\eta_n, n \in J^-\}$ forme une base de Riesz.
5. Si toutes les étapes précédentes sont correctement satisfaites, il suffit alors de substituer les formules dans l'expression suivante :

$$Q\eta_n = \zeta_n, \quad \text{pour tout } n \in J_-. \quad (7.31)$$

En guise d'exemple, nous invitons le lecteur à consulter [18, p.38-42]. Le lecteur y trouvera une application de la méthode décrite ci-dessus pour l'équation de la chaleur.

7.7 Exemple

Dans cette section, nous reprenons l'exemple 5.3 de la corde amortie présentée au chapitre 5. Lors de cet exemple, nous avons notamment montré qu'il s'agit d'un système hamiltonien à ports et qu'il est exponentiellement stable. Il est peut-être pertinent d'en faire quelques rappels.

La première étape consiste à formuler le système dynamique de la corde vibrante sous la forme d'un système hamiltonien à ports. Pour ce faire, définissons les variables

$$x_1(\zeta, t) = \rho \frac{\partial w}{\partial t}(\zeta, t), \quad (7.32)$$

$$x_2(\zeta, t) = \frac{\partial w}{\partial \zeta}(\zeta, t). \quad (7.33)$$

Ce système hamiltonien à ports est régi dans les variables (7.32) et (7.33) par l'EDP suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} x_1(\zeta, t) \\ x_2(\zeta, t) \end{bmatrix} = P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\mathcal{H}(\zeta) \begin{bmatrix} x_1(\zeta, t) \\ x_2(\zeta, t) \end{bmatrix} \right), \quad (7.34)$$

où nous avons posé $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathcal{H}(\zeta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho(\zeta)} & 0 \\ 0 & T(\zeta) \end{bmatrix}$. Les conditions frontières du système sont quant à elles données par $\frac{\partial w}{\partial t}(a, t) = 0$ et $T(b) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(b, t) = -k \frac{\partial w}{\partial t}(b, t)$ que nous exprimons sous la forme d'une matrice $W_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & k & k & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} W_{B,1} \\ W_{B,2} \end{bmatrix}$.

La deuxième étape consiste à montrer que cet exemple rentre dans la classe des systèmes dynamiques contrôlés aux frontières. Commençons par décrire l'opérateur \mathcal{B} agissant aux frontières. Cet opérateur est défini par la relation $\mathcal{B}x(t) = u(t)$, c'est-à-dire, $\mathcal{B}x = W_{B,1} \begin{bmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{bmatrix}$. Définissons l'opérateur \mathcal{A} comme $\mathcal{A}x = P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\mathcal{H}x)$. Il s'agit d'un opérateur linéaire dont le domaine est donné par

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in L^2([a, b]; \mathbb{R}^2) : \mathcal{H}x \in H^1([a, b]; \mathbb{R}^2), W_{B,2} \begin{bmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{bmatrix} = 0 \right\}.$$

A partir de l'opérateur \mathcal{A} , nous pouvons définir l'opérateur de dynamique A comme $Ax = \mathcal{A}x$ pour tout $x \in D(\mathcal{A}) \cap \text{Ker} \mathcal{B}$. Cet opérateur A engendre un semi-groupe fortement continu de

contraction et est également un opérateur spectral de Riesz.

Nous cherchons un opérateur $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, L^2([a, b]; \mathbb{R}^2))$ tel que $\mathcal{B}Bu = u$, $Bu \in D(\mathcal{A})$ et tel que $\mathcal{A}B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, L^2([a, b]; \mathbb{R}^2))$. L'expression de l'opérateur B est obtenue en vérifiant l'équation suivante :

$$\mathcal{B}B \left(T(b) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(b, t) + k \frac{\partial w}{\partial t}(b, t) \right) = T(b) \frac{\partial w}{\partial \zeta}(b, t) + k \frac{\partial w}{\partial t}(b, t), \quad (7.35)$$

avec $\mathcal{B} \left[\begin{array}{c} \rho(\zeta) \frac{\partial w}{\partial t}(\zeta, t) \\ \frac{\partial w}{\partial \zeta}(\zeta, t) \end{array} \right] = T(b)x_2(b, t) + \frac{k}{\rho(\zeta)}x_1(b, t)$. Dès lors, nous trouvons comme opérateur B :

$$Bu = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{u}{T(b)} \end{array} \right], \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R}. \quad (7.36)$$

Vérifions que l'opérateur B satisfait les différentes conditions.

- Bu est de carré intégrable.
- $\mathcal{H}Bu \in H^1([a, b]; \mathbb{R}^2)$.
- $\mathcal{A}B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, L^2([a, b]; \mathbb{R}^2))$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}Bu &= P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{H}(\zeta) \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{u}{T(b)} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c} \frac{u}{T(b)} T'(\zeta) \\ 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Dans cet exemple, nous allons considérer $T(\zeta) := T$ (constant). Dès lors, nous obtenons $\mathcal{A}Bu = 0$. De manière évidente, l'opérateur nul est linéaire borné.

$$\bullet W_{B,2} \left[\begin{array}{c} f_{\partial, Bu} \\ e_{\partial, Bu} \end{array} \right] = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} u - \frac{T(a)}{T(b)}u \\ 0 \\ 0 \\ u + \frac{T(a)}{T(b)}u \end{array} \right] = 0.$$

La troisième et dernière étape consiste à construire le modèle étendu. Le modèle étendu du système hamiltonien à ports de la corde vibrante amortie est donné par

$$\dot{x}^e(t) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & A \end{array} \right) x^e(t) + \left(\begin{array}{c} I \\ -B \end{array} \right) \tilde{u}(t), \quad x^e(0) = x_0^e. \quad (7.37)$$

Nous donnons l'expression de l'opérateur hamiltonien et en calculons son spectre. Pour ce faire, nous allons utiliser l'opérateur résolvant de H . Rappelons que

$$\begin{aligned} \sigma(H) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - H \text{ n'est pas bijectif}\}, \\ \rho(H) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - H \text{ est bijectif}\}. \end{aligned}$$

Considérons $s \in \rho(H)$. Nous cherchons à résoudre le système d'équations linéaires du premier ordre suivant :

$$(sI - H) \left(\begin{array}{c} \eta \\ \xi \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} y \\ z \end{array} \right), \quad (7.38)$$

où $\eta \in D(A^e)$, $\xi \in D(-(A^e)^*)$ et $y, z \in X^e$. Nous considérons $y = z = 0$. Nous cherchons alors les valeurs de η et ξ telles que $sI - H$ ne soit pas injectif. Après simplifications, le système (7.38) s'exprime comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1 + s\xi_1 = 0 \\ \eta_2 + s\xi_2 + A^*\xi_2 = 0 \\ \eta_1 + s\xi_1 - B^*\xi_2 = 0 \\ s\xi_2 + A\eta_2 - B\xi_1 + BB^*\xi_2 = 0 \\ \eta_1 + s\xi_1 = 0 \\ \eta_2 + s\xi_2 + A^*\xi_2 = 0 \end{array} \right. \quad (7.39)$$

On calcule aisément les expressions des opérateurs A , A^* , B et B^* . Nous obtenons que

$$A\eta_2 = \begin{pmatrix} T\eta'_{22} \\ \frac{1}{\rho}\eta'_{21} \end{pmatrix}, A^*\xi_2 = \begin{pmatrix} -T\xi'_{22} \\ \frac{1}{\rho}\xi'_{21} \end{pmatrix}, B\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\xi_1}{T(b)} \end{pmatrix}, B^*\xi_2 = \frac{1}{2} \int_a^b \xi_{22} d\xi.$$

A partir de ces expressions, nous reformulons le système (7.39) sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} s\eta_1 + \xi_1 - \frac{1}{2} \int_a^b \xi_{22} d\zeta = 0 \\ s\eta_{21} - T\eta'_{22} = 0 \\ s\eta_{22} - \frac{1}{\rho}\eta'_{21} - \frac{\eta_1}{T} + \frac{1}{2T} \int_a^b \eta_{22} d\zeta = 0 \\ \eta_1 + s\xi = 0 \\ \eta_{21} + s\xi_{21} - T\xi'_{22} = 0 \\ \eta_{22} + s\xi_{22} - \frac{1}{\rho}\xi'_{21} = 0 \end{array} \right. \quad (7.40)$$

avec comme conditions frontières

$$\begin{array}{ll} \eta_1, \xi_1 \in \mathbb{R} & \mathcal{H}\eta_2, \mathcal{H}\xi_2 \in H^1([a, b], \mathbb{R}^2) \\ \eta_{21}(a) = 0 & \xi_{21}(a) = \xi_{21}(b) \\ T\eta_{22}(b) + \frac{k}{\rho}\eta_{21}(b) = 0 & \frac{2}{\rho}\xi_{21}(a) + kT(\xi_{22}(a) + \xi_{22}(b)) = 0 \end{array}$$

Avant d'effectuer la résolution de ce système, nous allons lui appliquer une simplification pour obtenir.

$$\left\{ \begin{array}{l} s\eta_{22} - \frac{1}{\rho}\eta'_{21} = -\frac{s\eta_1}{T} \\ s = -\frac{\eta_1}{\xi_1} \\ s\eta_{21} - T\eta'_{22} = 0 \\ \eta_{21} + s\xi_{21} - T\xi_{22} = 0 \\ \eta_{22} + s\xi_{22} - \frac{1}{\rho}\xi'_{21} = 0 \end{array} \right. \quad (7.41)$$

D'une part, à partir de la première et de la troisième équation du système (7.41), nous obtenons

$$s\eta_{22} - \frac{T}{\rho s}\eta''_{22} = -\frac{s}{T}\eta_1. \quad (7.42)$$

D'autre part, à partir de la quatrième et de la cinquième équation du système (7.41), nous trouvons

$$\frac{T}{\rho s}\xi''_{22} - s\xi_{22} = \eta_{22} + \frac{1}{\rho s}\eta'_{21} \quad (7.43)$$

Reprenons l'équation (7.42) et posons $\begin{pmatrix} \eta'_{22} \\ \eta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \\ \mu \end{pmatrix} = X$. Nous obtenons alors le système d'équation suivant

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho s^2}{T} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\rho s^2 \eta_1}{T^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.44)$$

dont la solution est donnée par

$$X = e \begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho s^2}{T} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{(\zeta-a)} X_0 + \int_a^\zeta e \begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho s^2}{T} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{(\zeta-\tau)} \begin{bmatrix} \frac{\rho s^2 \eta_1}{T^2} \\ 0 \end{bmatrix} d\tau. \quad (7.45)$$

Le calcul des exponentielles matricielles est explicité en annexe E. Nous trouvons

$$\begin{aligned}\eta_{22} &= Ae^{\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{T}}s(\zeta-a)} + Be^{-\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{T}}s(\zeta-a)} - \eta_1 \\ \eta_{21} &= \sqrt{\rho}Ae^{\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{T}}s(\zeta-a)} - \sqrt{\rho}Be^{-\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{T}}s(\zeta-a)}\end{aligned}$$

où $A = \frac{T\eta'_{22}(a)}{2\sqrt{\rho}s} + \frac{\eta'_{22}(a)}{2} - \eta_1$ et $B = \frac{\eta_{22}(a)}{2} - \frac{T\eta'_{22}(a)}{2\sqrt{\rho}s}$.

Reprenons l'équation (7.43) et posons $\begin{pmatrix} \xi'_{22} \\ \xi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \\ \mu \end{pmatrix} = X$. Nous obtenons alors le système d'équation suivant

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho s^2}{T} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\rho s}{T}\eta_{22} + \frac{1}{T}\eta'_{21} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.46)$$

dont la solution est donnée par

$$X = e^{\begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho s^2}{T} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}(\zeta-a)} X_0 + \int_a^\zeta e^{\begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho s^2}{T} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}(\zeta-\tau)} \begin{bmatrix} \frac{\rho s}{T}\eta_{22} + \frac{1}{T}\eta'_{21} \\ 0 \end{bmatrix} d\tau. \quad (7.47)$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}\xi_{22} &= \left(\frac{\xi'_{22}(a)}{2} + \frac{\xi_{22}(a)\sqrt{\rho}s}{2T} - \left(\sqrt{\rho} + \frac{\sqrt{\rho}}{T} + \frac{\sqrt{\rho}}{s} \right) A \right) e^{\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{T}}s(\zeta-a)} \\ &\quad - \left(\frac{-\xi'_{22}(a)}{2} + \frac{\xi_{22}(a)\sqrt{\rho}s}{2T} - \left(\sqrt{\rho} + \frac{\sqrt{\rho}}{T} - \frac{\sqrt{\rho}}{s} \right) B \right) e^{-\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{T}}s(\zeta-a)} \\ &\quad + \left(\sqrt{\rho} + \frac{\sqrt{\rho}}{T} \right) Ae^{2\sqrt{\rho}s\zeta} - \left(\sqrt{\rho} + \frac{\sqrt{\rho}}{T} \right) Be^{-\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{T}}s(2\zeta)}\end{aligned} \quad (7.48)$$

$$\xi_{21} = \frac{T}{s}\xi'_{22} - \frac{1}{s}\eta_{21} \quad (7.49)$$

Nous allons maintenant utiliser les conditions frontières (7.7). La condition $\eta_{21}(a) = 0$ implique que $A = B$, c'est-à-dire, $\eta'_{22}(a) = \frac{-\sqrt{\rho}s}{T}\eta_1$. Ensuite, en utilisant la condition $T\eta_{22}(b) + \frac{k}{\sqrt{\rho}}\eta_{21}(b) = 0$, nous déduisons que

$$\left(T + \frac{k}{\sqrt{\rho}} \right) Ae^{\frac{\sqrt{\rho}}{T}s(b-a)} + \left(T - \frac{k}{\sqrt{\rho}} \right) Be^{-\frac{\sqrt{\rho}}{T}s(b-a)} - T\eta_1 = 0. \quad (7.50)$$

Différentes méthodologies peuvent être employées. On peut chercher à résoudre cette équation comme une équation du second degré et forcer les racines à être complexes en imposant que le discriminant soit négatif. Une seconde méthodologie consiste à séparer la partie réelle de la partie imaginaire de l'équation (7.50). C'est cette méthodologie que nous allons employer. Pour ce faire, décomposons s en parties réelle et imaginaire tel que $s = \sigma + iw$. Les constantes A et B deviennent

$$A = \frac{T\eta'_{22}(a)\sigma + \eta_{22}(a)\sqrt{\rho}(\sigma^2 + w^2)}{2\sqrt{\rho}(\sigma^2 + w^2)} - \eta_1 - i\frac{T\eta'_{22}(a)w}{2\sqrt{\rho}(\sigma^2 + w^2)}, \quad (7.51)$$

$$B = \frac{\eta_{22}(a)(\sigma^2 + w^2) - T\eta'_{22}(a)\sigma}{2\sqrt{\rho}(\sigma^2 + w^2)} + i\frac{T\eta'_{22}(a)w}{2\sqrt{\rho}(\sigma^2 + w^2)}. \quad (7.52)$$

En combinant (7.51) et (7.52) avec (7.50), nous trouvons les équations

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \left(T + \frac{k}{\sqrt{\rho}} \right) e^{\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{T}}(b-a)\sigma} \left[\frac{T\eta'_{22}(a)\sigma + \eta_{22}(a)\sqrt{\rho}(\sigma^2 + w^2)}{2\sqrt{\rho}(\sigma^2 + w^2)} \cos\left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{T}}(b-a)w\right) + \frac{T\eta'_{22}(a)w}{2\sqrt{\rho}(\sigma^2 + w^2)} \sin\left(\frac{\sqrt{\rho}}{T}w(b-a)\right) \right] \\ &\quad + \left(T - \frac{k}{\sqrt{\rho}} \right) e^{-\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{T}}(b-a)\sigma} \left[\frac{\eta_{22}(a)\sqrt{\rho}(\sigma^2 + w^2) - T\eta'_{22}(a)\sigma}{2\sqrt{\rho}(\sigma^2 + w^2)} \cos\left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{T}}(b-a)w\right) + \frac{T\eta'_{22}(a)w}{2\sqrt{\rho}(\sigma^2 + w^2)} \sin\left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{T}}w(b-a)\right) \right]\end{aligned} \quad (7.53)$$

$$\begin{aligned}
0 = & \left(T + \frac{k}{\sqrt{\rho}} \right) e^{\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{T}}(b-a)\sigma} \left[\frac{T\eta'_{22}(a)\sigma + \eta_{22}(a)\sqrt{\rho}(\sigma^2 + w^2)}{2\sqrt{\rho}(\sigma^2 + w^2)} \sin\left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{T}}(b-a)w\right) - \frac{T\eta'_{22}(a)w}{2\sqrt{\rho}(\sigma^2 + w^2)} \cos\left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{T}}w(b-a)\right) \right] \\
& + \left(T - \frac{k}{\sqrt{\rho}} \right) e^{-\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{T}}(b-a)\sigma} \left[\frac{\eta_{22}(a)\sqrt{\rho}(\sigma^2 + w^2) - T\eta'_{22}(a)\sigma}{2\sqrt{\rho}(\sigma^2 + w^2)} \sin\left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{T}}(b-a)w\right) + \frac{T\eta'_{22}(a)w}{2\sqrt{\rho}(\sigma^2 + w^2)} \cos\left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{T}}w(b-a)\right) \right]
\end{aligned} \tag{7.54}$$

Il est important de constater que les valeurs propres de hautes fréquences, c'est-à-dire, pour w tendant vers l'infini, vérifiant les équation (7.53) et (7.54) sont les valeurs propres en boucle ouverte de hautes fréquences. En effet, en considérant σ constant, nous trouvons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que

$$w_n = \frac{\sqrt{T}n\pi}{\sqrt{\rho}(b-a)}. \tag{7.55}$$

Sous asservissement d'état, les valeurs propres de hautes fréquences sont celles qui sont le moins déplacées vers la gauche dans le demi-plan complexe \mathbb{C}_0^- . Cette vérification nous permet d'une certaine manière de confirmer l'exactitude des calculs et développements effectués jusqu'à présent.

Les deux équations (7.53) et (7.54) ne doivent pas être résolues. En effet, une résolution analytique de ces équations semble difficilement envisageable. L'idée serait d'arriver à imposer des conditions sur σ et w telles que ces équations soient satisfaites. L'implémentation d'une résolution par une méthode de Newton est également possible, voir [10]. La valeur de départ prise serait la valeur numérique d'une valeur propre de haute fréquence en boucle ouverte.

Le calcul des valeurs propres en boucle fermé ne sera pas explicité. En effet, cela dépasse le cadre de cet exemple servant à illustrer la théorie présentée dans ce chapitre. Nous pouvons, néanmoins, donner une idée de la forme des valeurs propres. En effet, par le théorème 7.5.1, nous avons que les valeurs propres de l'opérateur hamiltonien sont réparties sur les quatre cadrans du plan complexe. Les valeurs propres de chaque cadran ont la même structure. Considérons le cadran des valeurs propres dont les parties réelles sont négatives et dont les parties imaginaires sont positives. Les valeurs propres de hautes fréquences se trouvent sur une verticale et, lorsque la partie réelle σ tend vers $-\infty$, la partie imaginaire w tend vers 0. La forme des valeurs propres pour chacun des cadrans est schématisée par la figure 7.1.

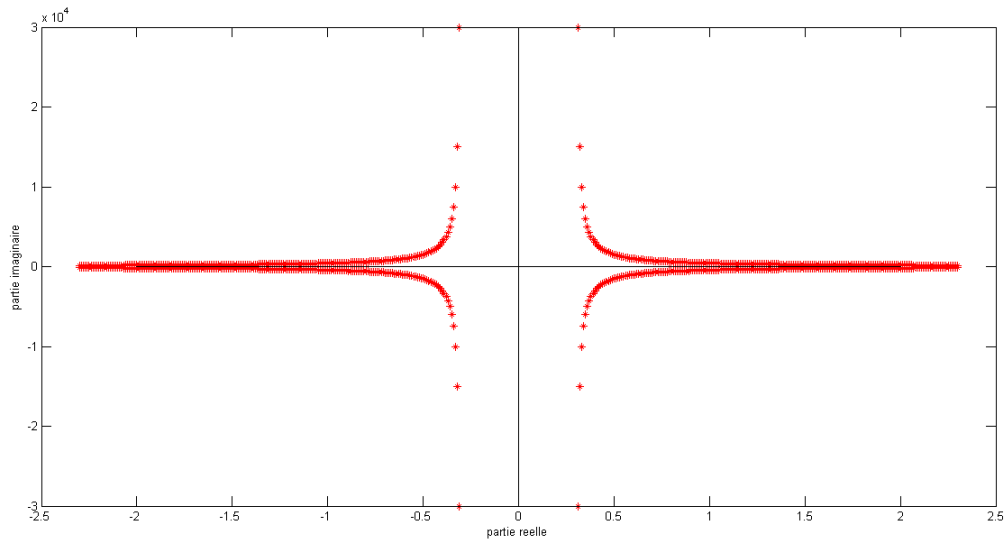


FIGURE 7.1 – Schéma des valeurs propres de l'opérateur hamiltonien

Chapitre 8

Conclusions et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons abordé la problématique de la généralisation de la théorie du contrôle pour des systèmes dynamiques de dimension infinie. Plus précisément, nous avons considéré la classe des systèmes hamiltoniens à ports.

Dans un premier temps, nous avons défini et illustré au travers d'exemples la notion de système hamiltonien à ports. Nous avons également présenté plusieurs caractéristiques de cette classe de systèmes avec notamment l'équation d'équilibre.

Dans un second temps, nous avons présenté différents éléments de la théorie des semi-groupes nécessaires à l'étude des systèmes de dimension infinie. Après quoi, nous avons abordé la notion de problème bien posé dans le cas d'un système hamiltonien à ports avec et, sans entrées et sorties. Par ailleurs, l'ajout des entrées et des sorties au niveau des frontières du domaine spatial s'est fait par le biais des matrices W_B et W_C . Il a notamment été démontré que ces matrices interviennent pour juger si un système est bien posé, pour analyser la stabilité du système et, interviennent dans l'expression de l'équation d'équilibre. Il a été également question d'étudier la stabilité de cette classe de système.

Finalement, nous nous sommes intéressés à la conception d'une commande d'asservissement d'état. L'idée première était de tenter d'extraire une structure pour l'équation de Riccati à partir de la structure hamiltonienne à ports. Toutefois, cela n'a pu être possible. Par conséquent, nous avons décidé d'aborder cette équation de Riccati d'une tout autre manière au travers l'opérateur Hamiltonien. Nous avons alors porté l'attention du lecteur sur la possibilité d'exprimer l'opérateur de Riccati au travers des vecteurs propres de l'opérateur hamiltonien.

Certaines contributions personnelles ont été amenées par l'auteur. En effet, un travail de recherche a été effectué débouchant sur une prise de risques encouragée par le promoteur de ce mémoire, Joseph Winkin. Les contributions principales se résument de la manière suivante :

- A partir des résultats démontrés dans le thèse de Villegas, il a pu être démontré qu'un système hamiltonien à ports est un système spectral de Riesz (voir théorème 5.1). A la connaissance de l'auteur et de Joseph Winkin, aucune unification similaire des résultats de Villegas n'a déjà été réalisée ;
- La structure hamiltonienne à ports a été utilisée pour étudier l'équation de Riccati et l'expression de la solution de cette équation. L'objectif était d'apporter une contribution à la conception de commandes d'asservissements d'état linéaires quadratiques pour la classe des systèmes hamiltoniens à ports.

Nous avons constaté que la formulation hamiltonienne à ports pouvait dans de nombreux cas permettre des simplifications par rapport à la théorie des semi-groupes. Tant que pour l'étude de la notion de problème bien posé que pour l'étude de la stabilité, nous avons pu énoncer et illustrer des résultats permettant leurs vérifications.

En espérant que ce mémoire a au moins permis de convaincre le lecteur de l'intérêt de fournir quelques efforts pour formuler un système à paramètres distribués sous la forme hamiltonienne à ports. Au travers les résultats présentés sur la notion de problème bien posé, de stabilité et de conception de commande linéaire quadratique, l'auteur espère avoir su rendre ce mémoire accessible à tout lecteur souhaitant se lancer dans l'étude des systèmes hamiltoniens à ports et se faire une première idée de la théorie existante sur cette classe de systèmes.

8.1 Perspectives

Le travail effectué sur cette problématique et l'utilisation de la structure hamiltonienne à ports ont amené plusieurs questions, sujets de recherche non-abordés dans ce mémoire et qu'il pourrait être intéressant d'étudier :

- L'interconnection de systèmes hamiltoniens à ports. Comme nous l'avons vu à la section 5.4, il est possible de stabiliser exponentiellement un système hamiltonien à ports lorsqu'il est contrôlé aux frontières par un système dynamique de dimension finie hamiltonien à ports. Dès lors, il serait intéressant d'étudier la structure des systèmes interconnectés. En effet, ces systèmes peuvent mener à des applications, notamment, en robotique. Nous invitons le lecteur à consulter [11] où l'on décrit la stabilisation d'un nanotweezer utilisé pour la manipulation d'ADN.
- Dériver l'expression de l'opérateur de Riccati en appliquant la méthode qui a été décrite lors du chapitre 7 et, ce, avec l'aide des développements déjà effectués à l'exemple 7.7.
- Etudier la contrôlabilité et l'observabilité des systèmes hamiltoniens à ports. L'objectif serait d'énoncer des résultats permettant de vérifier ces deux concepts en utilisant la structure hamiltonienne à ports.

Annexe A

Théorie de l'intégration

Dans cette annexe, nous allons nous rappeler aux bons souvenirs de l'intégration au sens de Lebesgue pour des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel ou à valeurs dans un espace fonctionnel. Dans la littérature, ces deux intégrales sont qualifiées d'intégrales de Bochner. Nous considérons les fonctions à valeurs soit dans un espace de Hilbert séparable X , soit dans un espace de Banach $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ où X_1 et X_2 sont des espaces de Hilbert séparables. Tout au long de cette annexe, nous utiliserons également les notations suivantes : l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{B}, \lambda)$ où Ω est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R} , où \mathcal{B} est une σ -algèbre et, où λ est la mesure de Lebesgue. Par ailleurs, la convention $0 \cdot \infty = 0$ sera prise.

Les principales références utilisées dans cette section sont [4, p.30-40], [8, annexe A] et [16, annexe A5]. L'idée générale pour la construction formelle de l'intégrale au sens de Bochner est similaire à l'intégrale de Lebesgue. En effet, nous commençons par définir les fonctions simples à valeurs dans un espace de Banach W ou à valeurs dans l'espace des applications continues.

Définition Considérons un espace de Banach W . Une fonction $f : \Omega \rightarrow W$ est dite simple lorsqu'il existe $w_1, \dots, w_n \in W$ et des ensembles B_1, \dots, B_n \mathcal{B} -mesurables disjoints tel que $f = \sum_{i=1}^n w_i \mathbb{1}_{B_i}$ où la fonction $\mathbb{1}_{B_i}(t)$ prend la valeur 1 lorsque $t \in B_i$ et 0 sinon.

Considérons un espace $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ où X_1 et X_2 sont deux espaces de Hilbert séparables. Une fonction $F : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X_1, X_2)$ est dite simple lorsqu'il existe $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ et des ensembles B_1, \dots, B_n \mathcal{B} -mesurables disjoints tel que $F = \sum_{i=1}^n F_i \mathbb{1}_{B_i}$ où la fonction $\mathbb{1}_{B_i}(t)$ prend la valeur 1 lorsque $t \in B_i$ et 0 sinon.



Nous pouvons maintenant définir la classe de fonctions intégrables au sens de Bochner en définissant les notions d'uniformément, de fortement et de faiblement mesurable au sens de Bochner.

Définition Considérons deux espaces de Hilbert séparables X_1 et X_2 ainsi que deux fonctions $F : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X_1, X_2)$ et $f : \Omega \rightarrow X_1$.

F est dite uniformément mesurable au sens de Bochner si il existe une suite de fonctions simples $F_n : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X_1, X_2)$ tel que, pour presque tout $t \in \Omega$, c'est-à-dire, sauf sur des sous-ensembles de Ω de mesure nulle, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = F(t).$$

f est dite fortement mesurable au sens de Bochner si il existe une suite de fonctions simples $f_n : \Omega \rightarrow X$ tel que, pour presque tout $t \in \Omega$, c'est-à-dire, sauf sur des sous-ensembles de Ω de mesure nulle, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t).$$

f est dite faiblement mesurable au sens de Bochner si pour tout $x \in X$ la fonction $\langle f(\cdot), x \rangle : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable. F est dite faiblement mesurable si Fx est faiblement mesurable pour tout $x \in X$.



De manière évidente, la notion d'uniformément mesurable implique la mesurabilité forte qui, elle-même, entraîne la mesurabilité faible. Notons également que les notions de fortement mesurable et de faiblement mesurable sont équivalentes dans cas d'un espace de Hilbert séparable, voir [7, théorème 3.5.3]).

Les notions de mesurabilité qui viennent d'être définies sont essentielles pour la définition des intégrales au sens de Bochner par approximation par des fonctions simples.

Nous commençons par expliciter la définition de l'intégrale de Bochner sur un ensemble $B \in \mathcal{B}$ d'une fonction simple $f : \Omega \rightarrow W$ définie par $f = \sum_{i=1}^n w_i \mathbb{1}_{B_i}$, où W est une espace de Banach. Considérons B_1, \dots, B_n une partition de \mathcal{B} . Une fonction f est dite intégrable au sens de Bochner sur B lorsque $\sum_{i=1}^n \|w_i\|_W \lambda(B_i \cap B) < \infty$. L'intégrale au sens de Bochner de f sur B est donnée par

$$\int_B f(t) d\lambda = \sum_{i=1}^n w_i \lambda(B_i \cap B).$$

Définissons maintenant l'intégrale au sens de Bochner respectivement pour des fonctions uniformément et fortement mesurables.

Définition Considérons trois espaces de Hilbert séparables X, X_1, X_2 ainsi que les fonctions $F : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X_1, X_2)$ et $f : \Omega \rightarrow X$ respectivement uniformément et fortement mesurables.

La fonction F est dite intégrable au sens de Bochner sur B si il existe une suite de fonctions simples F_n intégrables sur B au sens de Bochner, convergeant presque partout vers F et tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \|F(t) - F_n(t)\|_{\mathcal{L}(X_1, X_2)} d\lambda = 0.$$

L'intégrale au sens de Bochner de F est donnée par

$$\int_B F(t) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B F_n(t) d\lambda.$$

La fonction f est dite intégrable au sens de Bochner sur B si il existe une suite de fonctions simples f_n intégrables sur B au sens de Bochner, convergeant presque partout vers f et tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \|f(t) - f_n(t)\|_X d\lambda = 0.$$

L'intégrale au sens de Bochner de f est donnée par

$$\int_B f(t) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n(t) d\lambda.$$



Remarque : Par la suite, lorsque nous utiliserons des intégrales de Bochner nous prendrons la notation ds ou dt au lieu de $d\lambda$. L'intérêt étant d'empêcher toute confusion avec le scalaire λ pris dans l'ensemble résolvant. Néanmoins, il faudra garder à l'esprit que dt et ds sont des notations pour désigner la mesure de Lebesgue.

Plusieurs critères existent quant à la vérification de l'intégrabilité d'une fonction au sens de Bochner qui s'avèrent généralement plus simple à mettre en place que la définition. Cette annexe n'étant qu'une introduction aux intégrales de Bochner, nous n'allons présenter qu'un seul critère qui s'avèrera également utile dans la démonstration de la proposition A.2. La démonstration de cette proposition ne sera pas explicitée. Le lecteur le souhaitant pourra se référer à [7].

Proposition A.1

Considérons une fonction $f : \Omega \rightarrow X$, où X est un espace de Hilbert séparable et B un ensemble \mathcal{B} mesurable. La fonction f est intégrable au sens de Bochner sur B si et seulement si la fonction $\langle x, f(\cdot) \rangle : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable pour tout $x \in X$ et, si $\int_B \|f(t)\|_X dt < \infty$.

Remarque : Dans la proposition A.1, les notions de faiblement mesurable et de fortement mesurable coïncident.

Pour alléger les écritures, nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} P(\Omega; \mathcal{L}(X_1, X_2)) &:= \{F : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X_1, X_2) \mid \langle x_2, F(\cdot)x_1 \rangle \text{ est mesurable pour tout } x_1 \in X_1 \text{ et } x_2 \in X_2\}; \\ P^p(\Omega; \mathcal{L}(X_1, X_2)) &:= \{F : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X_1, X_2) \mid \|F\|_p := \left(\int_{\Omega} \|F(t)\|_{\mathcal{L}(X_1, X_2)}^p dt \right)^{1/p} < \infty\}; \\ L(\Omega; X) &:= \{f : \Omega \rightarrow X \mid \langle x, f(\cdot) \rangle \text{ est mesurable pour tout } x \in X\}; \\ L^p(\Omega; X) &:= \{f : \Omega \rightarrow X \mid \|f\|_p := \left(\int_{\Omega} \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} < \infty\}; \\ 1 &\leq p < \infty. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant donner quelques précisions sur les cas particuliers des semi-groupes uniformément continus et des semi-groupes C_0 . Comme nous l'indique le théorème 10.2.1 de [7], un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est fortement mesurable si et seulement si il est fortement continu. De manière similaire, nous avons également qu'un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est uniformément mesurable si et seulement si il est uniformément continu. Par ailleurs, nous avons que $\int_0^1 \|T(t)x\| dt \leq \infty$. Dès lors, l'intégrale de Bochner $\int_0^1 T(t)x dt$ du semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ est bien définie alors que $\int_0^1 T(t)dt$ ne le sera pas. Elle sera bien définie uniquement dans le cas d'un semi-groupe uniformément continu. Comme cela a déjà été précisé, nous travaillons généralement avec des semi-groupes fortement continus.

Lorsque l'on résout une équation différentielle ordinaire de la forme

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu \quad x(0) = x_0,$$

sur un intervalle de temps $[0, \tau]$ avec $\tau \geq 0$, on voit l'apparition du terme de convolution $\int_0^\tau T(\tau - t)Bu(t)dt$ pour tout $t \in [0, \tau]$ dans la solution qu'elle soit classique ou douce. Nous allons maintenant étudier ce terme de convolution et démontrer qu'il est bien défini au sens de l'intégrale de Bochner. Cela est repris dans la proposition A.2.

Proposition A.2

Considérons un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ fortement continu sur un espace de Hilbert séparable X et U un espace de Hilbert. Soit $F : [0, \infty[\rightarrow \mathcal{L}(U, X)$ une fonction faiblement mesurable tel que $\|F\| \in L^1([0, \tau], \mathbb{K})$.

Alors, pour tout $u \in U$, nous avons que l'intégrale $\int_0^\tau T(\tau - t)Fu(t)dt$ est bien définie au sens de Bochner.

Démonstration

Par hypothèse, le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est fortement continu ce qui implique qu'il soit fortement mesurable. Dès lors, le semi-groupe adjoint $(T^*(t))_{t \geq 0}$ est également fortement mesurable (voir [16], théorème 2.2.6). De plus, puisque les fonctions $T^*(\tau - \cdot)$ et $F(\cdot)u$ sont faiblement mesurables, nous obtenons, par définition de faiblement mesurable, que $\langle x, T(\tau - \cdot)F(\cdot)u \rangle = \langle T^*(\tau - \cdot)x, F(\cdot)u \rangle$ est mesurable pour tout $x \in X$ et pour tout $u \in U$. Par ailleurs, puisque $\|F\| \in L^1([0, \tau], \mathbb{K})$, nous trouvons

$$\int_0^\tau \|T(\tau - t)F(t)u\| dt \leq c \int_0^\tau \|F(t)u\| dt < \infty$$

où, c est une constante strictement positive telle que $\|T(t)\| \leq c$. Par conséquent, par la proposition A.1, nous pouvons déduire que l'intégrale $\int_0^\tau T(\tau - t)Fu(t)dt$ est bien défini au sens de Bochner.

□

En appliquant la proposition A.2 à l'opérateur $B \in \mathcal{L}(U, X)$ et à $u \in L^1([0, \tau]; U)$ où U est un espace de Hilbert séparable, nous obtenons que, pour tout $t \in [0, \tau]$, $\int_0^t T(t - s)Bu(s)ds$ est une intégrale bien définie au sens de Bochner.

En conclusion de cette annexe sur la théorie de l'intégration, nous effectuons deux remarques. Premièrement, nous n'avons pas développé une notion d'intégrale pour le cas d'une fonction n'étant que faiblement mesurable. Une solution existe qui consiste à avoir recours à l'intégrale au sens de Pettis. Il s'agit d'une notion plus faible que l'intégrale de Bochner. Nous ne nous attarderons pas sur cette notion puisqu'elle n'est pas utilisée dans ce mémoire. Le lecteur le souhaitant pourra consulter [8, annexe A1] ainsi que [4, p.33-37]. Deuxièmement, les théorèmes pour le calcul intégral au sens de Lebesgue comme le théorème de convergence monotone ou le théorème de convergence dominée restent valables pour l'intégrale de Bochner.

Annexe B

Système spectral et base de Riesz

Les différentes définitions et résultats présentés proviennent des documents [15] et [17]. Commençons par introduire certaines notations. Par X , nous désignons un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ et notons A un opérateur fermé et densément défini sur la domaine $D(A) \subset X$ et à valeur dans X . Par ailleurs, il est bien connu que le spectre de notre opérateur linéaire A peut être décomposé en trois parties distinctes :

- L'ensemble des valeurs propres de A noté $\sigma_p(A)$.
- Le spectre continu qui consiste en tous les scalaires qui ne sont pas des valeurs propres et tel que $\text{Im}(A - \lambda I) = X$; on le notera $\sigma_c(A)$.
- Le spectre résiduel qui reprend tous les scalaires restant du spectre de A noté $\sigma_r(A)$.

Dans cette annexe, nous introduisons la classe des opérateurs spectraux de Riesz. Cette classe reprend les opérateurs possédant une structure spectrale particulière et dont les vecteurs propres forment une base de Riesz. Définissons la notion de base de Riesz.

Définition Une suite de vecteurs $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sur l'espace de Hilbert X forme une base de Riesz si et seulement si

1. $\overline{\text{span}\{\phi_n\}} = X$ et
2. si il existe des constantes strictement positives m et M tel que pour tout entier positif n et pour tout scalaire c_i , $i = 1, 2, \dots, n$ nous avons

$$m \sum_{i=1}^n |c_i|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n c_i \phi_i \right\|^2 \leq M \sum_{i=1}^n |c_i|^2.$$

D'autres définitions équivalentes peuvent être données pour une base de Riesz. En effet, en considérant une base orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sur l'espace de Hilbert X , on peut dire que $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ forment une base de Riesz si et seulement si

$$\exists U : X \rightarrow X \text{ un isomorphisme tel que } \forall n \in \mathbb{N}_0, e_n = U\phi_n.$$

De manière similaire, cela signifie qu'une base de Riesz est une base orthonormale par rapport à un produit scalaire équivalent. Nous dirons qu'un opérateur A possède une base de Riesz si les vecteurs propres du dit opérateur forment une base de Riesz.



La définition d'un opérateur spectral de Riesz est donnée en utilisant la projection spectrale de l'opérateur.

Définition Considérons $\gamma \subset \sigma(A)$ un sous-ensemble compact de \mathbb{C} qui est ouvert et fermé dans $\sigma(A)$. Un ensemble comportant ces différentes propriétés est qualifié d'ensemble spectral compact. A partir de cet ensemble spectral compact γ , nous pouvons construire une courbe de Jordan fermée

Γ orientée dans le sens anti-horloger et bornant un domaine contenant tout les points de γ et aucun point de $\sigma(A) \setminus \gamma$. La projection spectrale sur γ est donnée par

$$E(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda.$$



Donnons maintenant la définition d'un opérateur spectral de Riesz.

Définition Considérons un opérateur A fermé dans un espace de Hilbert X avec comme spectre $\sigma(A)$ et comme ensemble de valeurs propres $\sigma_p(A)$. L'opérateur A est dit opérateur spectral de Riesz si et seulement si

1. Le spectre de A est totalement déconnecté, c'est-à-dire, pour tout $a, b \in \overline{\{\lambda_i, i \in \mathbb{N}\}}$, $[a, b] \notin \{\lambda_i, i \in \mathbb{N}\}$. De plus, toutes les valeurs propres sont isolées.
2. La famille de projection $E(\gamma)$ est uniformément bornée pour tout ensemble compact γ .
3. Considérons l'ensemble de valeurs propres $\{\lambda_i\}$ isolées de l'opérateur A . Nous avons que $\text{span}\{E(\lambda_i)X\} = X$.
4. $\dim\{E(\lambda_i)X\} < \infty$ pour toute valeur propre $\lambda_i \in \sigma_p(A)$.



L'utilisation de la définition pour vérifier si nous avons un opérateur spectral de Riesz est rarement la méthode la plus simple. Nous préférons utiliser le théorème suivant.

Théorème B.1

Considérons un opérateur A fermé avec un ensemble de valeurs propres isolées $\{\lambda_i\}_1^\infty$ et un ensemble de vecteurs propres $\{\{\phi_{ij}\}_{j=1}^{n_i}\}_{i=1}^\infty$. Si la fermeture de l'ensemble des valeurs propres est totalement déconnectée, égale à $\sigma(A)$ et si $\{\{\phi_{ij}\}_{j=1}^{n_i}\}_{i=1}^\infty$ forme une base de Riesz pour X , alors A est un opérateur spectral de Riesz.

Finalement, à partir des concepts présentés, nous pouvons définir un système spectral de Riesz dans le cas d'un système homogène.

Définition Le système dynamique

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

défini sur l'espace de Hilbert X est dit système spectral de Riesz si et seulement si

1. A est un opérateur spectral de Riesz ;
2. A génère une semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$.



Annexe C

Calcul de l'opérateur adjoint de A

Dans cette section, nous allons calculer l'adjointe de l'opérateur A . Considérons $x \in X := L^2([a, b]; \mathbb{K}^n)$ et l'opérateur A défini par

$$Ax = P_1 \frac{d}{d\zeta}(\mathcal{H}x) + P_0(\mathcal{H}x),$$

où les matrices P_1 et $\mathcal{H}(\zeta)$ sont auto-adjointes tandis que la matrice P_0 est anti-hermitienne et, ayant comme domaine associé

$$D(A) = \left\{ x \in L^2([a, b]; \mathbb{K}^n) : \mathcal{H}(x) \in \mathbb{H}^1([a, b]; \mathbb{K}^n), W_B \begin{bmatrix} \mathcal{H}(b)x(b, t) \\ \mathcal{H}(a)x(a, t) \end{bmatrix} = 0 \right\}.$$

De plus, pour tout $f, g \in L^2([a, b]; \mathbb{K}^n)$, nous munissons l'espace d'état du produit scalaire suivant

$$\langle f, g \rangle_X = \frac{1}{2} \int_a^b g^*(\zeta) \mathcal{H}(\zeta) f(\zeta) d\zeta. \quad (\text{C.1})$$

Rappelons également que l'adjointe de l'opérateur A notée A^* est définie par la relation suivante

$$\langle Ax, y \rangle_X = \langle x, A^*y \rangle_X \quad (\text{C.2})$$

avec $x \in D(A)$ et $y \in D(A^*)$.

Commençons d'une part par calculer le membre de gauche de la relation (C.2).

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \frac{1}{2} \int_a^b y^*(\zeta) \mathcal{H}(\zeta) Ax(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b y^*(\zeta) \mathcal{H}(\zeta) \left(P_1 \frac{d}{d\zeta}(\mathcal{H}x(\zeta)) + P_0(\mathcal{H}x(\zeta)) \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b y^*(\zeta) \mathcal{H}(\zeta) P_1 \frac{d}{d\zeta}(\mathcal{H}x(\zeta)) d\zeta + \frac{1}{2} \int_a^b y^*(\zeta) \mathcal{H}(\zeta) P_0(\mathcal{H}x(\zeta)) d\zeta \end{aligned}$$

En intégrant par partie, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \frac{1}{2} [y^*(\zeta) \mathcal{H}(\zeta) P_1 \mathcal{H}(\zeta) x(\zeta)]_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{d\zeta} (y^*(\zeta) \mathcal{H}(\zeta)) P_1 \mathcal{H}x(\zeta) d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_a^b y^*(\zeta) \mathcal{H}(\zeta) P_0 \mathcal{H}x(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

On impose que $\frac{1}{2} [y^*(\zeta) \mathcal{H}(\zeta) P_1 \mathcal{H}(\zeta) x(\zeta)]_a^b = 0$. Cette annulation est possible par définition des domaines $D(A)$ et $D(A^*)$. Il nous faudra donc définir les conditions frontières présentes dans

$D(A^*)$ pour que l'annulation de ce terme soit satisfaite. Nous y reviendrons dans la section C.1. Par conséquent, nous trouvons

$$\langle Ax, y \rangle = \frac{1}{2} \int_a^b \left((P_0^* \mathcal{H}^*(\zeta) y(\zeta))^* - (P_1^* \left(\frac{d}{d\zeta} y^*(\zeta) \mathcal{H}(\zeta) \right)^*)^* \right) \mathcal{H}(\zeta) x(\zeta) d\zeta.$$

D'autre part, le membre de droite de (C.2) est donné par

$$\langle x, A^* y \rangle = \frac{1}{2} \int_a^b (A^* y(\zeta))^* \mathcal{H} x(\zeta) d\zeta.$$

Par conséquent, nous trouvons

$$(A^* y(\zeta))^* = \left[P_0^* \mathcal{H}^*(\zeta) y(\zeta) - P_1^* \left(\frac{d}{d\zeta} y^*(\zeta) \mathcal{H}(\zeta) \right)^* \right]^*. \quad (\text{C.3})$$

Finalement, puisque les matrices P_1 et $\mathcal{H}(\zeta)$ sont auto-adjointes et que la matrice P_0 est anti-hermitienne, nous obtenons

$$A^* y = -P_0 \mathcal{H} y - P_1 \frac{d}{d\zeta} (\mathcal{H} y) \quad (\text{C.4})$$

avec $y \in D(A^*)$.

C.1 Calcul du domaine $D(A^*)$

Pour le calcul de l'opérateur adjoint de A , nous avons imposé que

$$[y^*(\zeta) \mathcal{H}(\zeta) P_1 \mathcal{H}(\zeta) x(\zeta)]_a^b = 0 \quad (\text{C.5})$$

de par les conditions frontières présentes dans $D(A)$ et $D(A^*)$. Dès lors, à partir de la relation (C.5) et des conditions frontières $D(A)$, nous allons déterminer l'expression de $D(A^*)$.

Commençons par reformuler (C.5) sous une forme plus adéquate. Tout d'abord, remarquons que nous avons

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_1(\mathcal{H}y)(b) \\ -P_1(\mathcal{H}y)(a) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(\mathcal{H}y)(a) \\ P_1(\mathcal{H}y)(b) \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 0 & P_1 \\ -P_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathcal{H}y)(a) \\ (\mathcal{H}y)(b) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Cela implique que la relation (C.5) est équivalente à

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & P_1 \\ -P_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathcal{H}y)(a) \\ (\mathcal{H}y)(b) \end{bmatrix} \right)^* \begin{bmatrix} (\mathcal{H}x)(b) \\ (\mathcal{H}x)(a) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{C.6})$$

Définissons

$$W_B = \begin{bmatrix} W_{B,1} \\ W_{B,2} \end{bmatrix}$$

La matrice des conditions frontières associée au domaine $D(A)$.

$$X_B = \begin{bmatrix} V_B \\ W_B \end{bmatrix}$$

On complète la matrice W_B avec des vecteurs (V_B) pour obtenir ainsi une matrice X_B qui soit inversible.

En introduisant les matrices X_B et R_0 dans la relation (C.6), nous avons

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & P_1 \\ -P_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathcal{H}y)(a) \\ (\mathcal{H}y)(b) \end{bmatrix} \right)^* R_0^{-1} X_B^{-1} X_B R_0 \begin{bmatrix} (\mathcal{H}x)(b) \\ (\mathcal{H}x)(a) \end{bmatrix} = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$\text{où } R_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} P_1 & -P_1 \\ I & I \end{bmatrix}.$$

Par la formule du complément de Schur, nous pouvons calculer l'inverse de la matrice R_0 . Notons que les différentes hypothèses d'inversibilité sont vérifiées. L'inverse de R_0 est donnée par

$$R_0^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} P_1^{-1} & I \\ -P_1^{-1} & I \end{bmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

Notamment, on vérifie aisément que $R_0 R_0^{-1} = R_0^{-1} R_0 = I$.

En utilisant les conditions frontières liées au domaine de A , nous constatons que

$$X_B R_0 \begin{bmatrix} (\mathcal{H}x)(b) \\ (\mathcal{H}x)(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \star \\ 0 \end{bmatrix},$$

où $\star = V_B R_0 \begin{bmatrix} (\mathcal{H}x)(b) \\ (\mathcal{H}x)(a) \end{bmatrix}$. De plus, si nous notons

$$\left[X_B^{-*} R_0^{-*} \begin{bmatrix} 0 & P_1 \\ -P_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathcal{H}y)(a) \\ (\mathcal{H}y)(b) \end{bmatrix} \right]^* = \begin{pmatrix} \star 1 \\ \star 2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

Dès lors, pour obtenir l'orthogonalité, il nous suffit d'imposer l'annulation de $\star 1$, c'est-à-dire,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \tilde{V}_B^* & \tilde{W}_B^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^{-1} & -P_1^{-1} \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P_1 \\ -P_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathcal{H}y)(a) \\ (\mathcal{H}y)(b) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \star 2 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.10})$$

où $\tilde{X}_B = \begin{bmatrix} \tilde{V}_B & \tilde{W}_B \end{bmatrix}^T$ est l'inverse de la matrice X_B . En effet, puisque la matrice W_B est de rang plein, il existe une matrice \tilde{W}_B dite inverse à droite de dimension $2n \times n$ tel que $W_B \tilde{W}_B = I_n$. L'inverse à droite de la matrice W_B au sens de Moore-Panrose est donnée par $\tilde{W}_B = W_B^* (W_B W_B^*)^{-1}$.

En utilisant les définitions des matrices R_0 et Σ , la relation (C.10) devient

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_B^* & \tilde{W}_B^* \end{bmatrix} \Sigma R_0 \Sigma \begin{bmatrix} (\mathcal{H}y)(a) \\ (\mathcal{H}y)(b) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \star 2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.11})$$

Cela implique que nous devons avoir

$$\tilde{W}_B^* (\Sigma R_0 \Sigma) \begin{bmatrix} (\mathcal{H}y)(a) \\ (\mathcal{H}y)(b) \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{C.12})$$

Cela définit les conditions frontières pour l'adjointe de A et par conséquent, nous trouvons comme domaine pour l'adjointe

$$D(A^*) = \left\{ y \in L^2([a, b]; \mathbb{K}^n) : \mathcal{H}(x) \in \mathbb{H}^1([a, b]; \mathbb{K}^n), \tilde{W}_B^* (\Sigma R_0 \Sigma) \begin{bmatrix} (\mathcal{H}y)(a) \\ (\mathcal{H}y)(b) \end{bmatrix} = 0 \right\}. \quad (\text{C.13})$$

Annexe D

Calcul de l'opérateur adjoint de B

Dans cette section, nous présentons le détail du calcul de l'adjointe de l'opérateur $B : \mathbb{R}^m \rightarrow L^2([a, b]; \mathbb{K}^n)$. Cet opérateur B est tel que pour tout $u \in \mathbb{R}^m$, nous avons

$$\begin{aligned} Bu &\in D(\mathcal{A}), \\ \mathcal{A}B &\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, L^2([a, b]; \mathbb{K}^n)), \\ \mathcal{B}Bu &= u, \end{aligned}$$

où l'opérateur \mathcal{A} est défini par

$$\mathcal{A}x = P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{H}x + P_0 \mathcal{H}x$$

avec $x(t) \in D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in L^2([a, b]; \mathbb{K}^n) : \mathcal{H}x \in H^1([a, b]; \mathbb{K}^n), W_{B,2} \begin{bmatrix} f_{\partial} \\ e_{\partial} \end{bmatrix} = 0 \right\}$ et $D(\mathcal{B}) = D(\mathcal{A})$.

L'opérateur linéaire borné B est donné par Jacob et Zwart [8] comme

$$(Bu)(\zeta) := \mathcal{H}^{-1}(\zeta) \left(S_{11} \frac{\zeta - a}{b - a} + S_{21} \frac{b - \zeta}{b - a} \right) u, \quad (\text{D.1})$$

où S_{11} et S_{21} sont des matrices de dimension $n \times m$. Le calcul de l'adjointe de B s'identifie par la relation suivante

$$\langle x, Bu \rangle_X = \langle u^*, Bx \rangle_{\mathbb{R}^m}, \quad (\text{D.2})$$

où $u \in \mathbb{R}^m$.

Nous allons maintenant résoudre l'équation (D.2). Pour ce faire, il est primordial de garder à l'esprit que le produit scalaire du terme de gauche est défini sur $L^2([a, b]; \mathbb{K}^n)$ alors que celui du terme de droite est défini sur \mathbb{R}^m .

A partir des équations (D.1) et (D.2), nous obtenons les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} u^*(B^*x) &= \frac{1}{2} \int_a^b ((Bu)(\zeta))^* \mathcal{H}(\zeta) x(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b u^* \left(S_{11}^* \frac{\zeta - a}{b - a} + S_{21}^* \frac{b - \zeta}{b - a} \right) x(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2} u^* \int_a^b \left(S_{11}^* \frac{\zeta - a}{b - a} + S_{21}^* \frac{b - \zeta}{b - a} \right) x(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

Cela nous permet de conclure que

$$B^*x = \frac{1}{2} \int_a^b \left(S_{11}^* \frac{\zeta - a}{b - a} + S_{21}^* \frac{b - \zeta}{b - a} \right) x(\zeta) d\zeta. \quad (\text{D.3})$$

Annexe E

Calcul de l'exponentielle matricielle

Dans l'exemple du chapitre 7, il nous faut résoudre deux systèmes d'équations différentielles du premier ordre. Pour exprimer l'expression de leurs solutions, nous avons recours à l'exponentielle matricielle. Le calcul de ces exponentielles matricielles est explicité dans cette annexe. La méthode employée consiste à calculer la transformée de Laplace de l'opérateur résolvant de la matrice prise en exposant.

L'exponentielle matricielle que nous devons calculer est la suivante : $e^{\begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho s^2}{T} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$. Pour ce faire, nous commençons par calculer l'opérateur résolvant de la matrice $\begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho s^2}{T} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Nous trouvons

$$(\lambda I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & -\frac{\rho s^2}{T} \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 - \frac{\rho s^2}{T}} \begin{bmatrix} \lambda & -\frac{\rho s^2}{T} \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}, \quad (\text{E.1})$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{f}_1(s) & \hat{f}_2(s) \\ \hat{f}_3(s) & \hat{f}_4(s) \end{bmatrix}. \quad (\text{E.2})$$

Nous pouvons maintenant prendre la transformée de Laplace inverse de la matrice obtenue en (E.2). Le raisonnement étant identique à chaque fois, nous développons les détails de calcul uniquement pour $\hat{f}_1(s)$. Dès lors, il nous faut calculer

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\lambda}{(\lambda - \frac{\sqrt{\rho}s}{T})(\lambda + \frac{\sqrt{\rho}s}{T})} \right].$$

Nous effectuons une décomposition en fractions simples pour ensuite prendre la transformée de Laplace inverse de chacun des termes.

$$\frac{\lambda}{(\lambda - \frac{\sqrt{\rho}s}{T})(\lambda + \frac{\sqrt{\rho}s}{T})} = \frac{A_{11}}{(\lambda - \frac{\sqrt{\rho}s}{T})} + \frac{A_{21}}{(\lambda + \frac{\sqrt{\rho}s}{T})} \quad (\text{E.3})$$

L'équation (E.3) devient

$$\lambda = A_{11}\lambda + A_{11}\frac{\sqrt{\rho}s}{T} + A_{21}\lambda - A_{21}\frac{\sqrt{\rho}s}{T} \quad (\text{E.4})$$

Cela implique que $A_{11} = A_{21} = \frac{1}{2}$. Dès lors, nous avons que

$$\hat{f}_1(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda - \frac{\sqrt{\rho}s}{T}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda + \frac{\sqrt{\rho}s}{T}}. \quad (\text{E.5})$$

Nous obtenons alors

$$f_1(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{\sqrt{\rho}s}{\sqrt{T}}t} + \frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{\rho}s}{\sqrt{T}}t}. \quad (\text{E.6})$$

$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\lambda}{(\lambda - \frac{\sqrt{\rho}s}{\sqrt{T}})(\lambda + \frac{\sqrt{\rho}s}{\sqrt{T}})} \right] = \frac{T}{2\sqrt{\rho}s} e^{\frac{\sqrt{\rho}s}{\sqrt{T}}t} - \frac{T}{2\sqrt{\rho}s} e^{-\frac{\sqrt{\rho}s}{\sqrt{T}}t} \quad (\text{E.7})$$

$$f_3(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(\lambda - \frac{\sqrt{\rho}s}{\sqrt{T}})(\lambda + \frac{\sqrt{\rho}s}{\sqrt{T}})} \right] = \frac{\sqrt{\rho}s}{2\sqrt{T}} e^{\frac{\sqrt{\rho}s}{\sqrt{T}}t} - \frac{\sqrt{\rho}s}{2\sqrt{T}} e^{-\frac{\sqrt{\rho}s}{\sqrt{T}}t} \quad (\text{E.8})$$

Bibliographie

- [1] Brian D. O. Anderson and John B. Moore. *Optimal Control : Linear Quadratic Methods*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1990.
- [2] Alain Bensoussan. *Representation and control of infinite dimensional systems. Volume II*. Systems & control. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1993.
- [3] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, November 2010.
- [4] Frank M. Callier. Lecture notes on semigroup theory. Department of Mathematics, July 2006.
- [5] Klaus-Jochen Engel and Rainer Nagel. *A Short Course on Operator Semigroups*. Springer edition, 2006.
- [6] Jacques Hadamard. *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*. Princeton university bulletin edition, 1902.
- [7] Einar Hille and Ralph Saul Phillips. *Functional Analysis and Semi-groups*. Number vol. 31,ptie. 1 in American Mathematical Society : Colloquium publications. American Mathematical Society, 1957.
- [8] Birgit Jacob and Hans Zwart. *Linear Port-Hamiltonian Systems on Infinite-dimensional Spaces*. Springer edition, 2012.
- [9] Frank M. Callier Laurence Dumortier and Joseph Winkin. *On the nonnegative self-adjoint solutions of the operator Riccati equation for infinite dimensional systems*. Birkhäuser-Verlag, 1995.
- [10] Walter Murray. Newton-type methods. *Department of Management Science and Engineering, Stanford University, Stanford, CA*, 2010.
- [11] Hector Ramirez, Yann Le Gorrec, and Hans Zwart. Exponential stabilization of a class of flexible microgrippers using dynamic boundary port hamiltonian control. In *52nd IEEE Conference on Decision and Control, CDC 2013*, pages 460–465, Los Alamitos, CA, USA, December 2013. IEEE Control Systems Society.
- [12] Héctor RAMIREZ ESTAY, Hans Zwart, and Yann Le Gorrec. *Exponential stability of boundary control port Hamiltonian systems with dynamic feedback*. France, January 2013.
- [13] Robert Sporken. *Physique générale : Electricité*. Université de Namur, 2009-2010.
- [14] Javier Andres Villegas. *Approach to distributed parameter systems*. Dutch institute of systems and control edition, 2007.
- [15] Hans Zwart. *Riesz basis for strongly continuous groups*. Dutch institute of systems and control edition, 2013.
- [16] Hans Zwart and Ruth Curtain. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Springer edition, 1995.

- [17] Hans Zwart and Bao-Zhu Guo. *Riesz spectral systems*. Dutch institute of systems and control edition, 2011.
- [18] Kuiper Zwart, C. R. Kuiper, and H. J. Zwart. Connections between the algebraic riccati equation and the hamiltonian for riesz-spectral systems. *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control*, 6 :4–481, 1996.